

Nombres complexes (partie I) – Exercices

Définition

1 Calculer la forme algébrique des nombres suivants. Indiquer les parties réelles et imaginaires.

- a. $1 - (i - 1)$ b. $2(4 + 3i) + i(6i - 1)$
 c. $3 + i - 2(5 - 2i)$ d. $(1 + i)(3 - 2i)$
 e. $(i + 1)(3 - 2i)$ f. $2i(i - 1) + 2$

2 Donner la forme algébrique des nombres suivants.

- a. $(1 + i)^2$ b. $(\sqrt{3} - i)^2$
 c. $(2i - 3)^2$ d. $(2 - i)^3$

3 Calculer la forme algébrique des nombres suivants.

- a. $\frac{1}{i}$ b. $-\frac{2}{3i}$ c. $\frac{1}{1-i}$ d. $\frac{i}{2+i}$
 e. $\frac{2-i}{2+i}$ f. $\frac{2-3i}{1+2i}$ g. $\frac{1+\sqrt{3}}{1+i}$ h. $\frac{1}{1+\frac{1}{1-i}}$

4 Soit $z = x + iy$ avec x et y réel. Donner la forme algébrique de iz et préciser ses parties réelle et imaginaire.

5 Soit $z = x + iy$ avec x et y réels et $Z = \frac{1}{z+1}$. Démontrer que $\operatorname{Re}(Z) = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$ et $\operatorname{Im}(Z) = \frac{-y}{(x+1)^2+y^2}$.

6 Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. Écrire en fonction de x et y les parties réelle et imaginaire de

- a. $z + z^2$ b. $\frac{3}{z} (z \neq 0)$ c. $\frac{z}{z-1} (z \neq 1)$

7 On pose $z = x + 2 + i(-ix + 2x) + 2i - 5ix$ où x est un réel.

- Déterminer la forme algébrique de z .
- À quelle condition sur x le complexe z est-il réel ? Imaginaire pur ?

Représentation graphique

9 On considère les points A, B, C d'affixes $z_A = -2 - 3i, z_B = -1 - i$ et $z_C = i$. Démontrer que les points A, B, C sont alignés.

8 Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. Pour $z \neq i$ on pose $Z = \frac{z-2}{z-i}$.

- Écrire Z sous forme algébrique.
- Dans un repère orthonormé, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que
 - Z soit réel ;
 - Z soit imaginaire pur.

Module

10 Déterminer le module de chaque nombre suivant.

- a. $\sqrt{3} + i$ b. $-\frac{1}{2} - 2i$
 c. $3i$ d. $2 - \sqrt{5}$
 e. $(4 + 3i)(5 - i)$ f. $(2 - 3i)^5$
 g. $\frac{5}{(6-i)^2}$ h. $\frac{x+iy}{x-iy}$ où $(x, y) \neq (0, 0)$
 i. $\frac{3-7i}{(1-i)^4}$ j. $\frac{1}{4+5i} + \frac{1}{6+7i}$

11 On considère les points A, B, C d'affixes $z_A = -2 + 5i, z_B = 4 + 3i$ et $z_C = 1 + i$. Calculer les distances AB, AC, BC .

12 On considère les points A, B, C d'affixes $z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \sqrt{3} - i$ et $z_C = -2i$.

- Démontrer que les points A, B, C sont situés sur un même cercle de centre O .
- Démontrer que $OABC$ est un losange.

13 On considère les nombres complexes $z_1 = i$ et $z_2 = 1 - i$.

- Déterminer $|z_1 z_2|$ en utilisant des propriétés sur les modules et arguments.
- Retrouver ce résultat en calculant la forme algébrique de $z_1 z_2$.

14 Soit a et b les nombres complexes tels que

$$|a| = 4, |b| = \sqrt{2}.$$

Donner le module de

- $a^2, b^2, a^{2018}, b^{2018}, a^{1515}$ et b^{1515} .
- $\frac{1}{a}, ab^6, \frac{b^2}{a}, ib$, et $-\frac{2a}{b^4}$.

15 Déterminer le module de

$$z_1 = 2i(1 + i\sqrt{3})^6 \text{ et } z_2 = (-1 + i)^2(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3.$$

16 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

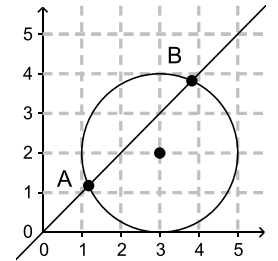
- a. $|z + 1 - 2i| = 5$ b. $|z - 1 + 2i| = |z - 1|$
 c. $|z - 2 - i| = |z|$ d. $|iz| = |1 - z|$

17 (2015, centres étrangers). Vrai ou faux ? Justifier.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$$|z - 1| = |z - i| \text{ et } |z - 3 - 2i| \leq 2.$$

Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées $(3; 2)$ et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$. Cette droite coupe le cercle en deux points A et B .



Affirmation : l'ensemble S est le segment $[AB]$.

Conjugués

18 Donner les conjugués des nombres suivants.

- a. $3 - i$ b. $4i$ c. $3 + \sqrt{2}$ d. $i\sqrt{2} + 1$

19 Vrai ou faux ? Justifier. Pour tout complexe z ,

- a. $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ b. $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$

20 On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

- Montrer que $\bar{j} = j^2 = \frac{1}{j}$.
- Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
- Montrer que $z^2 + z + 1 = (z - j)(z - \bar{j})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

21 Montrer que chacun des nombres suivants est réel ou imaginaire pur, z désignant un complexe quelconque.

- a. $z^2 - \bar{z}^2$ b. $\frac{z^2 + \bar{z}^2}{1 + z\bar{z}}$

22 Soit deux complexes z_1 et z_2 de module 1. Montrer que $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ est réel.

23 Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer en fonction de \bar{z} les conjugués des nombres suivants.

- a. $2 + z$ b. $4i + 2z$ c. iz d. $z\bar{z} + i$
 e. $\frac{4}{z}$ f. $\frac{1-i}{iz}$ g. $5 - (2 + i)z$

24 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que
 a. $|\bar{z} - 1 + 3i| = |1 - z|$ b. $|i\bar{z} - 2| = |z|$

25 On note A et M les points d'affixes respectives 2 et z . Pour tout $z \neq 2$, on considère $z' = \frac{z}{z-2}$ et le point M' d'affixe z' .

On cherche à déterminer les ensembles suivants :

- E l'ensemble des points M tels que z' soit réel ;
- F l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur ;

A – Méthode algébrique

On pose $z = x + iy$ avec x et y réels, et $z' = x' + iy'$ avec x' et y' réels.

1. Montrer que $x' = \frac{x^2+y^2-2x}{(x-2)^2+y^2}$ et $y' = \frac{-2y}{(x-2)^2+y^2}$.
2. Déterminer E puis F .

B – Utilisation du conjugué

3. Montrer que z' est réel si et seulement si $z = \bar{z}$. En déduire E .
4. Montrer que M' appartient à F si et seulement si $2|z|^2 = 4 \operatorname{Re}(z)$. En déduire une équation de F puis F .

26 Démontrer que pour tous complexes z , z' on a $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(zz\bar{z}') + |z'|^2$.

27 Montrer que pour tous complexes z , z' on a $|z - z'|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)$.
 Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\bar{z}z' = -1$.

Équations

28 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

- a. $z - 1 = i(5 - z)$ b. $z + i\bar{z} = 2i + 2$
 c. $z + i\bar{z} = 2i + 3$ d. $z + i\bar{z} = 0$
 e. $2\bar{z} = i - 1$ f. $(3 - 2i)\bar{z} + i = 0$
 g. $\frac{\bar{z}-1}{z+1} = i$ h. $\frac{\bar{z}-1}{z+1} = 2i$

29 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

- a. $z^2 = -1$ b. $z^2 + 2z + 5 = 0$
 c. $z^2 - z + 1 = 0$ d. $z^2 - \sqrt{3}z + 31 = 0$
 e. $4z^2 - 8z + 5 = 0$ f. $-z^2 + 6z - 10 = 0$

30 Vrai ou faux ? Justifier.

- a. Comme $3\sqrt{2} - i$ est solution de $z^2 - 6\sqrt{2}z + 19 = 0$, l'autre solution est $3\sqrt{2} + i$.
 b. Comme $2 - i$ est solution de $z^2 - 3z + 3 + i = 0$, l'autre solution est $2 + i$.

31 Soit θ un réel. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} : z^2 - 2 \cos \theta z + 1 = 0$. Vrai ou faux ? Justifier.

1. Les solutions de cette équation sont complexes et conjuguées et distinctes.
2. Cette équation a pour discriminant $-4 \sin^2 \theta$.
3. $z = \cos \theta + i \sin \theta$ est solution de l'équation.

32 On considère l'équation $z^2 = -3 - 4i$ d'inconnue complexe z . On écrit z sous forme algébrique $x + iy$.

1. Montrer que l'équation équivaut à

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ xy = -2 \end{cases}$$

2. Montrer que ce système équivaut à

$$\begin{cases} x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases}$$

3. En déduire les solutions de $z^2 = -3 - 4i$.

4. Résoudre de même les équations $z^2 = -2i$ et $z^2 = 15 - 8i$.

33 On considère l'équation

$$z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = 0.$$

1. Montrer que cette équation admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = (z - i)(z^2 - 2z + 2)$.

3. En déduire les solutions de l'équation.

34 Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. Pour $z \neq i$, on pose $z' = \frac{z-2}{z-i}$.

1. Écrire z' sous forme algébrique.
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Déterminer puis construire l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :
 a. z' soit réel ;
 b. z' soit imaginaire pur.

35 (2014, Antilles-Guyane). Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. On prendra comme unité 2 cm (ou 2 carreaux) sur chaque axe.

Faire un graphique que l'on complètera au fur et à mesure. On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f .
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 5$.
 Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
 On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel.
 On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z . Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z) - 8| = 3$.
 Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Tracer (F) sur le graphique.
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
 a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est $x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$.
 b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel. Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
 Compléter le graphique en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F) .