Nombres complexes (partie I) – Exercices

Définition

1 Calculer la forme algébrique des nombres suivants. Indiquer les parties réelles et imaginaires.

a. $1-(i-1)$ **b.** $2(4+3i)+i(6i-1)$
c. $3+i-2(5-2i)$ **d.** $(1+i)(3-2i)$
e. $(i+1)(3-2i)$ **f.** $2i(i-1)+2$

2 Donner la forme algébrique des nombres suivants.

a. $(1+i)^2$ **b.** $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$
c. $(2i-3)^2$ **d.** $(2-i)^3$

3 Calculer la forme algébrique des nombres suivants.

a. $\frac{1}{i}$ **b.** $-\frac{2}{3i}$ **c.** $\frac{1}{1-i}$ **d.** $\frac{i}{2+i}$
e. $\frac{2-i}{2+i}$ **f.** $\frac{2-3i}{1+2i}$ **g.** $\frac{1+\sqrt{3}}{1+i}$ **h.** $\frac{1}{1+\frac{1}{1-i}}$

4 Soit $z=x+iy$ avec x et y réel. Donner la forme algébrique de iz et préciser ses parties réelle et imaginaire.

5 Soit $z=x+iy$ avec x et y réels et $Z=\frac{1}{z+1}$. Démontrer que $\operatorname{Re}(z)=\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$ et $\operatorname{Im}(z)=\frac{-y}{(x+1)^2+y^2}$.

6 Soit $z=x+iy$ avec x et y réels. Écrire en fonction de x et y les parties réelle et imaginaire de

a. $z+z^2$ **b.** $\frac{3}{z}\,(z\neq 0)$ **c.** $\frac{z}{z-1}\,(z\neq 1)$

7 On pose $z=x+2+i(-ix+2x)+2i-5ix$ où x est un réel.

1. Déterminer la forme algébrique de z.
2. À quelle condition sur x le complexe z est-il réel ? Imaginaire pur ?

Représentation graphique

8 Soit $z=x+iy$ avec x et y réels. Pour $z\neq i$ on pose $Z=\frac{z-2}{z-i}$.

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Dans un repère orthonormé, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que
   a. Z soit réel ;
   b. Z soit imaginaire pur.

9 On considère les points A, B, C d'affixes

$$z_A=-2-3i,\ z_B=-1-i \text{ et } z_C=i.$$

Démontrer que les points A, B, C sont alignés.

Module

10 Déterminer le module de chaque nombre suivant.

a. $\sqrt{3}+i$ **b.** $-\frac{1}{2}-2i$
c. $3i$ **d.** $2-\sqrt{5}$
e. $(4+3i)(5-i)$ **f.** $(2-3i)^5$
g. $\frac{5}{(6-i)^2}$ **h.** $\frac{x+iy}{x-iy}$ où $(x,y)\neq(0,0)$
i. $\frac{3-7i}{(1-i)^4}$ **j.** $\frac{1}{4+5i}+\frac{1}{6+7i}$

11 On considère les points A, B, C d'affixes

$$z_A=-2+5i,\ z_B=4+3i \text{ et } z_C=1+i.$$

Calculer les distances AB, AC, BC.

12 On considère les points A, B, C d'affixes

$$z_A=\sqrt{3}+i,\ z_B=\sqrt{3}-i \text{ et } z_C=-2i.$$

1. Démontrer que les points A, B, C sont situés sur un même cercle de centre O.
2. Démonter que $OABC$ est un losange.

13 On considère les nombres complexes $z_1=i$ et $z_2=1-i$.

1. Déterminer $|z_1z_2|$ en utilisant des propriétés sur les modules et arguments.
2. Retrouver ce résultat en calculant la forme algébrique de z_1z_2.

14 Soit z_1 et z_2 les nombres complexes tels que

$$|z_1|=4,\ |z_2|=\sqrt{2}.$$

Donner le module de

1. z_1^2, z_2^2, z_1^{1515}, z_2^{1515}, z_1^{2014} et z_2^{2014}.
2. $\frac{1}{z_1}$, $z_1z_2^6$, $\frac{z_2^2}{z_1}$, z_1, iz_2, z_2^4 et $-\frac{2z_1}{z_2^4}$.

15 Déterminer le module de

$$z_1=(-1+i)\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3 \text{ et } z_2=2i\left(1+i\sqrt{3}\right)^6.$$

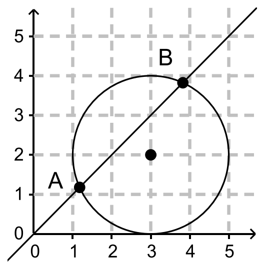
16 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

a. $|z+1-2i|=5$ **b.** $|z-1+2i|=|z-1|$
c. $|z-2-i|=|z|$ **d.** $|iz|=|1-z|$

17 *(2015, centres étrangers).* Vrai ou faux ? Justifier.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$|z-1|=|z-i|$
et $|z-3-2i|\leq 2$.



Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées $(3;2)$ et de rayon 2, et la droite d'équation $y=x$.
Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.
Affirmation : l'ensemble S est le segment $[AB]$.

Conjugués

18 Donner les conjugués des nombres suivants.

a. $3-i$ **b.** $4i$ **c.** $3+\sqrt{2}$ **d.** $i\sqrt{2}+1$

19 Soit $z\in\mathbb{C}$. Exprimer en fonction de $\bar{z}$ les conjugués des nombres suivants.

a. $2+z$ **b.** $4i+2z$ **c.** iz **d.** $z\bar{z}+i$
e. $\frac{4}{z}$ **f.** $\frac{1-i}{iz}$ **g.** $5-(2+i)z$

20 On pose $j=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que $\bar{j}=j^2=\frac{1}{j}$.
2. Montrer que $1+j+j^2=0$.
3. Montrer que $z^2+z+1=(z-j)(z-\bar{j})$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

21 Vrai ou faux ? Justifier.

a. $\operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ **b.** $\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{2}(z-\bar{z})$

22 Soit z_1 et z_2 les nombres complexes tels que
$$|z_1| = 4, |z_2| = \sqrt{2}.$$
Donner le module de $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}^4$ et $-\frac{2z_1}{\overline{z_2}^4}$.

23 Montrer que chacun des nombres suivants est réel ou imaginaire pur, z désignant un complexe quelconque.

a. $z^2 - \bar{z}^2$ **b.** $\frac{z^2+\bar{z}^2}{1+z\bar{z}}$

24 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

a. $|\bar{z} - 1 + 3i| = |1 - z|$ **b.** $|i\bar{z} - 2| = |z|$

25 On note A et M les points d'affixes respectives 2 et z. Pour tout $z \neq 2$, on considère $z' = \frac{z}{z-2}$ et le point M' d'affixe z'.

On cherche à déterminer les ensembles suivants :

- E l'ensemble des points M tels que z' soit réel ;
- F l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur ;

A – Méthode algébrique

On pose $z = x + iy$ avec x et y réels, et $z' = x' + iy'$ avec x' et y' réels.

1. Montrer que $x' = \frac{x^2+y^2-2x}{(x-2)^2+y^2}$ et $y' = \frac{-2y}{(x-2)^2+y^2}$.
2. Déterminer E puis F.

B – Utilisation du conjugué

3. Montrer que z' est réel si et seulement si $z = \bar{z}$. En déduire E.
4. Montrer que M' appartient à F si et seulement si $2|z|^2 = 4\,\mathrm{Re}(z)$. En déduire une équation de F puis F.

26 Démontrer que pour tous complexes z, z' on a
$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2.$$

27 Soit deux complexes z_1 et z_2 de module 1. Montrer que $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ est réel.

28 Montrer que pour tous complexes z, z' on a
$$|z - z'|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2).$$
Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\bar{z}z' = -1$.

Équations

29 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a. $2\bar{z} = i - 1$ **b.** $(3 - 2i)\bar{z} + i = 0$

c. $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$ **d.** $\frac{\bar{z}-1}{z+1} = 2i$

30 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a. $z^2 = -1$ **b.** $z^2 + 2z + 5 = 0$

c. $z^2 - z + 1 = 0$ **d.** $z^2 - \sqrt{3}z + 31 = 0$

e. $4z^2 - 8z + 5 = 0$ **f.** $-z^2 + 6z - 10 = 0$

31 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Si $3\sqrt{2} - i$ est solution de $z^2 - 6\sqrt{2}z + 19 = 0$, l'autre solution est $3\sqrt{2} + i$.

b. Si $2 - i$ est solution de $z^2 - 3z + 3 + i = 0$, l'autre solution est $2 + i$.

32 Soit θ un réel. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$. Vrai ou faux ? Justifier.

1. Les solutions de cette équation sont complexes et conjuguées et distinctes.
2. Cette équation a pour discriminant $-4\sin^2\theta$.
3. $z = \cos\theta + i\sin\theta$ est solution de l'équation.

33 On considère l'équation $z^2 = -3 - 4i$ d'inconnue complexe z. On écrit z sous forme algébrique $x + iy$.

1. Montrer que l'équation équivaut à $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ xy = -2 \end{cases}$.
2. Montrer que ce système équivaut à
$$\begin{cases} x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases}.$$
3. En déduire les solutions de $z^2 = -3 - 4i$.
4. Résoudre de même les équations
$$z^2 = -2i \text{ et } z^2 = 15 - 8i.$$

34 On considère l'équation
$$z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = 0.$$

1. Montrer que cette équation admet une solution imaginaire pure et la déterminer.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a
$$z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = (z - i)(z^2 - 2z + 2).$$
3. En déduire les solutions de l'équation.

35 Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. Pour $z \neq i$, on pose $z' = \frac{z-2}{z-i}$.

1. Écrire z' sous forme algébrique.
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Déterminer puis construire l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :
   a. z' soit réel ;
   b. z' soit imaginaire pur.

36 *(2014, Antilles-Guyane).* Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.

Faire un graphique que l'on complétera au fur et à mesure.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel.
   On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z) - 8| = 3$.
   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Tracer (F) sur le graphique.
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est
   $$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$
   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).