

# Suites numériques

## 1. Raisonnement par récurrence

En mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel  $n$ . Par exemple la proposition suivante :

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

On peut vérifier l'exactitude de cette propriété pour  $n = 1$ ,  $n = 2$  etc. mais même si on la vérifie jusqu'à  $n = 100$ , cela ne démontre pas qu'elle est vraie pour tout  $n$ .

Pour effectuer ce genre de démonstration, on dispose d'un outil particulier qu'est la démonstration par récurrence.

Ainsi supposons que l'on se trouve au début d'une file illimitée de personnes portant tout un chapeau et que la règle veuille que lorsque l'une d'elles quitte son chapeau, alors la suivante le quitte aussi. Si la première quitte son chapeau, on est assuré que toutes les autres le quitteront.

**Théorème (démonstration par récurrence).** Soit une propriété qui dépend d'un entier naturel  $n$ . Si cette propriété est vraie pour un entier  $n_0$  et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ , elle est aussi vraie pour l'entier  $n + 1$ , alors elle est vraie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ .

On désigne par  $P(n)$  une propriété qui dépend d'un entier naturel  $n$  et par  $n_0$  un entier naturel. Pour démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq n_0$   $P(n)$  est vraie on procède en deux étapes :

- Première étape : on vérifie que  $P(n_0)$  est vraie, c'est l'**initialisation**.
- Deuxième étape : on suppose qu'il existe un entier  $n$  tel que  $P(n)$  soit vraie (c'est l'**hypothèse de récurrence**) et on démontre qu'alors  $P(n + 1)$  est vraie. C'est l'**hérédité**.

### Exemple

Montrons que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

La propriété que l'on souhaite montrer dépend d'un entier  $n \geq 1$ , ici  $n_0 = 1$ .

**Initialisation.** Pour  $n = 1$ , chaque membre de l'égalité vaut 1, donc la propriété est vérifiée au rang initial.

**Hérédité.** Supposons la propriété vraie pour un certain entier  $n \geq 1$  et montrons qu'elle est alors vraie pour  $n + 1$ . L'hypothèse de récurrence est donc :  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , elle permet d'écrire

$$1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n + 1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On reconnaît alors la propriété annoncée pour l'entier  $n + 1$ , ce qui prouve que la propriété est héréditaire.

D'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

### Exemple

Soit la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 3u_n - 2$ . Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$ , on a  $u_n = 3^n + 1$ .

La propriété que l'on souhaite montrer dépend d'un entier  $n \geq 0$ , ici  $n_0 = 0$ .

**Initialisation.** pour  $n = 0$  on a  $u_0 = 2$  et  $3^0 + 1 = 1 + 1 = 2$ , donc la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

**Hérédité.** Supposons la propriété vraie pour un certain entier  $n \geq 0$  et montrons qu'alors est vraie pour l'entier  $n + 1$ . L'hypothèse de récurrence est donc :  $u_n = 3^n + 1$ . Par définition de la suite, on a  $u_{n+1} = 3u_n - 2$  donc en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$u_{n+1} = 3(3^n + 1) - 2 = 3^{n+1} + 3 - 2 = 3^{n+1} + 1$$

ce qui prouve que la propriété est héréditaire.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_n = 3^n + 1$ .

Démontrons une propriété vue dans le cours sur les complexes.

### Exemple

Montrons que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  et tout complexe  $z$ , on a  $|z^n| = |z|^n$ .

On procède par récurrence sur  $n \geq 1$ . Pour  $n = 1$  c'est clair, chaque membre vaut  $|z|$ .

Supposons la propriété vraie pour un entier  $n$ . Alors d'après une propriété des modules, on a  $|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n||z|$  et l'hypothèse de récurrence permet alors d'écrire  $|z^n||z| = |z|^n|z| = |z|^{n+1}$ , ce qui prouve que la propriété est héréditaire.

## 2. Limite finie ou infinie d'une suite

### ❖ Suites convergentes et suites divergentes

**Définition.** On dit qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$  si tout intervalle de la forme  $]A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On écrit alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

### Exemple

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \sqrt{n}$  et démontrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

Soit  $A$  un réel. Si  $A < 0$ , l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite dès le rang 0.

Si  $A \geq 0$ , l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient  $u_n$  si et seulement si

$$u_n > A \Leftrightarrow \sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > A^2.$$

Ainsi, si l'on appelle  $n_0$  un entier supérieur à  $A^2$ , l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient les termes de la suite à partir du rang  $n_0$ .

**Définition.** On dit qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite  $-\infty$  si la suite  $(-u_n)$  a pour limite  $+\infty$ .

On écrit alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

**Définition.** On dit qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite le réel  $\ell$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On écrit alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

### Exemple

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{1}{n}$  et démontrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

Soit  $I$  un intervalle ouvert contenant 0. Cet intervalle est inclus dans un intervalle de la forme  $]a; b[$  avec  $a < 0 < b$ . il suffit donc de montrer qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à  $]a; b[$ .

Soit  $n_0$  un entier supérieur à  $\frac{1}{b}$ ; on a donc  $\frac{1}{n_0} \leq b$ . Pour tout entier  $n \geq n_0$ , il vient  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$  d'où  $\frac{1}{n} \leq a$  et enfin  $\frac{1}{n} \in ]a; b[$  puisque  $\frac{1}{n} > 0$ .

**Remarque.** L'intervalle doit être ouvert dans la définition pour traduire la notion intuitive de limite. Par exemple l'intervalle  $[-1; 0]$  contient 0, mais ne contient aucun des termes de la suite  $(\frac{1}{n})_n$ . Le fait que l'intervalle soit ouvert permet « d'avoir un peu de place » autour de la limite.

**Définition.** Une suite  $(u_n)$  est dite convergente si elle admet une limite finie. Elle est dite divergente vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) si elle admet pour limite  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) et divergente dans tous les autres cas (c'est-à-dire si elle n'admet pas de limite).

**Remarque.** L'écriture  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  signifie que  $(u_n)$  converge et a pour limite  $\ell$ .

**Théorème.** Si une suite admet une limite finie  $\ell$ , cette limite est unique

**Démonstration.** Soit  $(u_n)$  une suite convergeant vers  $\ell$  et supposons qu'elle admet une deuxième limite  $\ell'$ , avec  $\ell < \ell'$ .

L'intervalle  $I_1 = ]\ell - 1; \frac{\ell + \ell'}{2}[$  est ouvert et contient  $\ell$ , donc par définition il existe un rang  $n_1$  à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à  $I_1$ .

Pour la même raison, il existe un rang  $n_2$  à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à  $I_2 = ]\frac{\ell + \ell'}{2}; \ell + 1[$ .

Pour  $n$  plus grand que  $n_1$  et  $n_2$ , tous les termes de la suite appartiendraient aux intervalles disjoints  $I_1$  et  $I_2$ , c'est impossible.

Ainsi une suite ne peut pas avoir deux limites distinctes. ■

### Proposition.

1. Les suites de terme général  $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}}$  admettent 0 pour limite.
2. Les suites de terme général  $n, n^2, \sqrt{n}$  admettent  $+\infty$  pour limite.

La démonstration est analogue aux deux exemples précédents.

### ❖ Recherche de seuil

Lorsqu'une suite admet pour limite un  $+\infty$ , on peut s'intéresser à la recherche d'un rang à partir duquel  $u_n \geq A$  où  $A$  est un réel fixé.

### Exemple

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \frac{n^2+1}{n-1}$  pour  $n \geq 2$ . On peut démontrer que cette suite admet  $+\infty$  comme limite. L'algorithme ci-contre permet de déterminer un rang à partir duquel  $u_n \geq 100$ .

U prend la valeur 5  
 N prend la valeur 2  
 Tant que U < 100  
     N prend la valeur N + 1  
     U prend la valeur (U<sup>2</sup> + 1)/(U - 1)  
 Fint Tant Que  
 Afficher N

## 3. Opérations sur les limites

On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ . On veut déterminer, sans revenir aux définitions, les limites de  $u_n + v_n$ ,  $u_n v_n$  et  $\frac{u_n}{v_n}$  à partir de celles de  $u_n$  et  $v_n$ . Les résultats suivants, intuitifs, donne la réponse, mais il existe des cas où l'on ne peut pas prévoir la limite, ce sont des formes indéterminées.

### ➤ Règle sur la somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	X

### Exemple

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \frac{1}{n} + n^2$  pour  $n \geq 1$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , on en déduit par somme que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

### ➤ Règle sur le produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell$	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$	$\ell \ell'$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	X

### ➤ Règle sur le quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell$	$\ell \neq 0$	$\ell$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	0	$\pm\infty$	$\ell$	0	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$ (*)	0	$\pm\infty$ (*)	X	X

(\*) Le signe dépend de celui de  $u_n$  et  $v_n$  lorsque  $n$  est grand.

### Exemple

Déterminer les limites des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définie par  $u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+1}$  et  $v_n = \frac{2n}{5n^2+3}$ .

**Réponse.** Dans chaque cas, on obtient une forme indéterminée du type «  $\frac{\infty}{\infty}$  ». On factorise numérateur et dénominateur par le terme de plus haut degré. On a

$$u_n = \frac{n^2 \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .

De même  $v_n = \frac{2n}{n^2 \left(5 + \frac{3}{n^2}\right)} = \frac{2}{n} \times \frac{1}{5 + \frac{3}{n^2}}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{3}{n^2}\right) = 5$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$  il vient par produit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

#### 4. Théorèmes de comparaison

**Théorème.** Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

**Démonstration** (exigible). On considère un intervalle  $I$  de la forme  $]A; +\infty[$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , il existe un entier  $n_1$  tel que  $n \geq n_1 \Rightarrow u_n \in I$ , c'est-à-dire  $u_n \geq A$ .

Par hypothèse, il existe un entier  $n_2$  tel que  $n \geq n_2 \Rightarrow u_n \leq v_n$ .

Soit  $N$  un entier supérieur à  $n_1$  et  $n_2$ . Alors pour  $n \geq N$ , on a  $A \leq v_n$ , ou encore  $v_n \in I$ .

##### Exemple

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \geq 1$  par  $u_n = n^2 + n \cos n$ . On sait que pour tout réel  $x$ , on a  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , d'où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $-n \leq n \cos n \leq n$ . Il en résulte en particulier que  $n^2 - n \leq u_n$ .

Écrivons  $n^2 - n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$  on déduit par produit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n) = +\infty$ .

Du théorème précédent on déduit alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Théorème.** Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

**Théorème (des gendarmes).** Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites telles que  $u_n \leq v_n \leq w_n$  à partir d'un certain rang. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ .

##### Exemple

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \geq 1$  par  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Puisque  $(-1)^n$  vaut soit 1, soit  $-1$ , on peut écrire  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ , d'où  $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , on déduit du théorème des gendarmes que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

## 5. Limite d'une suite géométrique

**Théorème.** Soit  $q$  un réel et  $(u_n)$  la suite définie pour  $n \geq 0$  par  $u_n = q^n$ .

- Si  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ;
- si  $q = 1$ , la suite  $(u_n)$  est constante égale à 1 ;
- si  $|q| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  ;
- si  $q \leq -1$ , la suite  $(u_n)$  n'a pas de limite.

**Démonstration** (exigible pour  $q > 1$ ).

1. Si  $q = 1$ , le résultat est évident. Si  $q < -1$ , les termes de la suite sont de plus en plus grands en valeur absolue, et l'alternance des signes les empêche de « se stabiliser ». Si  $q = -1$ , la suite prend alternativement les valeurs  $-1$  et  $1$ , donc n'admet pas de limite.

2. Supposons  $q > 1$ . Alors on peut écrire  $q = 1 + h$  où  $h$  est un réel strictement positif. Montrons par récurrence sur  $n$  que l'on a  $q^n \geq 1 + nh$  pour tout  $n \geq 1$ .

• C'est clair si  $n = 1$  ;

• Supposons que le résultat soit prouvé pour un certain entier  $n$ . Alors

$$q^{n+1} = q^n \times q \geq (1 + nh)(1 + h) = 1 + nh + h + nh^2 = 1 + (n + 1)h + nh^2 \\ \geq 1 + (n + 1)h,$$

l'inégalité résultant du fait que  $nh^2 \geq 0$ .

Cette inégalité s'appelle inégalité de Bernoulli.

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + nh) = +\infty$  on en déduit par comparaison que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

3. Supposons maintenant  $|q| < 1$ . Si  $q = 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  puisque la suite est nulle à partir du deuxième terme.

Supposons dorénavant  $q \neq 0$ . On a  $0 < |q| < 1$ , d'où  $\frac{1}{|q|} > 1$ . Ainsi d'après 2., la suite

$(v_n)$  définie par  $v_n = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \frac{1}{|q|^n}$  diverge vers  $+\infty$ . Il en résulte par passage à l'inverse que la suite de terme général  $|q|^n = \frac{1}{v_n}$  tend vers 0.

Pour conclure, il est nécessaire d'utiliser le résultat suivant :

$$\text{pour tout réel } x, \text{ on a } -|x| \leq x \leq |x|.$$

En effet si  $x \geq 0$ , comme  $|x| = x$ , l'inégalité équivaut à  $-x \leq x \leq x$ , qui est clairement vraie. De même si  $x \leq 0$ , on a  $|x| = -x$  et l'inégalité annoncée équivaut à  $x \leq x \leq -x$ , ce qui est vérifié.

En prenant  $x = q^n$  dans cette inégalité, il vient

$$-|q^n| \leq q^n \leq |q^n| \text{ ou encore } -|q|^n \leq q^n \leq |q|^n.$$

Le théorème des gendarmes montre alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$  puisque l'on vient de voir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0. \blacksquare$$

### Exemple

Soit  $u_n = \frac{5^n + 1}{8^n}$ . Déterminons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

On a  $u_n = \left(\frac{5}{8}\right)^n + \frac{1}{8^n}$ , or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$  car  $\left|\frac{5}{8}\right| < 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{8^n} = 0$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8^n = +\infty$ .

Finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

### Exemple

Soit  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$  pour  $n \geq 0$ .

1. Écrire un algorithme permettant de calculer  $S_n$  où  $n$  est un entier.
2. Écrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n > 2 - 10^{-7}$ .
3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

### Réponse.

1. On remarque que  $S_0 = 1$  et  $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ . On peut donc programmer cette suite de la façon suivante.

2. Voici ci-dessous.

Saisir $n$ $u$ prend la valeur 1 $n$ prend la valeur 0 Pour $k$ de 1 à $n$ faire $u$ prend la valeur $u + \frac{1}{k^2}$ $n$ prend la valeur $n + 1$ Fin Pour Afficher $u$	$u$ prend la valeur 1 $n$ prend la valeur 0 Tant que $u \leq 2 - 10^{-7}$ faire $u$ prend la valeur $u + \frac{1}{k^2}$ $n$ prend la valeur $n + 1$ FinPour Afficher $n$
Question 1	Question 2

3. Si l'on pose  $u_n = \frac{1}{2^n}$ , on peut écrire  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ , et comme  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$  on a  $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$ .  
Comme  $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$ .

## 6. Convergence d'une suite monotone

### Définition.

- Une suite  $(u_n)$  est dite majorée s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq M$ .
- Une suite  $(u_n)$  est dite minorée s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \geq m$ .
- Une suite  $(u_n)$  est dite bornée si elle est minorée et majorée.

### Exemple

- Les suites de termes général  $\sin n$ ,  $\cos n$  et  $(-1)^n$  sont majorées par 1 et minorées par  $-1$ , elles sont donc bornées.
- La suite de terme général  $n$  n'est pas majorée mais est minorée par 0 ou tout autre réel inférieur ou égal à 0.

**Théorème.**

- Si une suite est croissante et admet une limite finie, elle est majorée par cette limite.
- Si une suite est décroissante et admet une limite finie, elle est minorée par cette limite.

**Démonstration.** Soit  $(u_n)$  une suite croissante de limite  $\ell$ . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > \ell$ .

Comme  $(u_n)$  est croissante, on en déduit que pour  $n \geq n_0$  on a  $u_n \geq u_{n_0} > \ell$ .

L'intervalle ouvert  $]\ell - 1; u_{n_0}[$  contient  $\ell$  mais ne contient pas les termes à partir du rang  $n_0$ . Ceci montre que  $\ell$  n'est pas la limite de  $(u_n)$ . Il en résulte que pour tout  $n$ ,  $u_n \leq \ell$ . ■

**Théorème (de convergence monotone).**

- Une suite croissante et majorée converge.
- Une suite décroissante et minorée converge.

**Démonstration.** Ce théorème fait appel à une propriété très importante de  $\mathbb{R}$  (propriété de la borne supérieure) vu en Première Année. Il est d'ailleurs faux si l'on travaille sur l'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$ . ■

**Exemple**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ . Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$  on a donc  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ .
3. Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer la limite.

**Réponse.**

1.  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $f'(x) = \frac{x^2-2}{2x}$ . Par conséquent  $f$  est décroissante sur  $]0; \sqrt{2}[$ , croissante sur  $[\sqrt{2}; +\infty[$ , donc  $f$  en  $\sqrt{2}$  un minimum égal à  $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ .

2. Montrons par récurrence la propriété : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ .

Pour  $n = 0$ , c'est vrai car  $u_0 = 2$  et  $u_1 = \frac{3}{2}$ .

Supposons la propriété vraie pour un entier  $n$ . Comme  $f$  est croissante sur  $[\sqrt{2}; +\infty[$ , on a

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow f(\sqrt{2}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Rightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1},$$

ce qui prouve que la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3. La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par  $\sqrt{2}$  donc elle converge vers un réel  $\ell \geq \sqrt{2}$ . La suite  $(u_{n+1})$  a pour limite  $\ell$  et la suite  $\left(\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)\right)$  a pour limite

$\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$  d'après les règles sur les limites. De l'unicité de la limite et de la relation  $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ , on déduit  $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$ , d'où  $\ell^2 = 2$  et  $\ell = \sqrt{2}$ .

**Remarque 1.** On peut se passer d'une étude de fonction.

1.  $\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 \geq (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 \geq 8x^2 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 \geq 0$ ,

l'élevation au carré étant justifiée par le fait que  $x + \frac{2}{x} > 0$ .

2. Comme  $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = f(u_n) \geq \sqrt{2}$ , on a donc  $u_n \geq \sqrt{2}$

pour tout  $n$ . Il en résulte  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n = \frac{2-u_n^2}{2u_n} \leq 0$ .

**Remarque 2.** Pour tout  $n$ ,  $u_n \in \mathbb{Q}$ , et pourtant sa limite  $\sqrt{2}$  n'est pas un rationnel. Cela montre que le théorème précédent ne s'applique qu'aux suites de réel.

### Exemple

Considérons la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$ .

On va montrer que la suite est décroissante et minorée par  $-2$  et que par conséquent elle est convergente.

- Montrons par récurrence la propriété : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \geq -2$ .

C'est vrai pour  $n = 0$ , et si c'est vrai pour  $n$ , alors

$$u_n \geq -2 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n \geq -1 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n - 1 \geq -2 \Rightarrow u_{n+1} \geq -2,$$

la propriété est donc héréditaire et donc la suite est minorée par  $-2$ .

- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 1 - u_n = -\frac{1}{2}(u_n + 2) \leq 0$  car  $u_n \geq -2$ . Ainsi la suite  $(u_n)$  est décroissante.

Ainsi cette suite est convergente, soit  $\ell$  sa limite. La suite  $(u_{n+1})$  a pour limite  $\ell$  et la suite  $\left(\frac{1}{2}u_n - 1\right)$  a pour limite  $\frac{1}{2}\ell - 1$  d'après les règles sur les limites. De l'unicité de la limite et de  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$ , on déduit  $\ell = \frac{1}{2}\ell - 1$ , d'où  $\ell = -2$ .

**Remarque.** Un majorant de la suite n'est pas nécessairement sa limite !

**Théorème.** Une suite croissante non majorée a pour limite  $+\infty$ .

**Démonstration.** Soit  $(u_n)$  une suite croissante non majorée et  $A$  un réel. Puisque  $A$  ne majore pas  $(u_n)$ , il existe  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > A$ , donc par croissance de  $(u_n)$ ,  $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq u_{n_0} > A$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . ■