Suites numériques

1. Raisonnement par récurrence

En mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n. Par exemple la proposition suivante :
Pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
On peut vérifier l'exactitude de cette propriété pour $n = 1$, $n = 2$ etc. mais même si on la vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas qu'elle est vraie pour tout n.
Pour effectuer ce genre de démonstration, on dispose d'un outil particulier qu'est la démonstration par récurrence.
Ainsi supposons que l'on se trouve au début d'une file illimitée de personnes portant tout un chapeau et que la règle veuille que lorsque l'une d'elles quitte son chapeau, alors la suivante le quitte aussi. Si la première quitte son chapeau, on est assuré que toutes les autres le quitteront.

Théorème (démonstration par récurrence). Soit une propriété qui dépend d'un entier naturel n. Si cette propriété est vraie pour un entier n_0 et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier n supérieur ou égal à n_0, elle est aussi vraie pour l'entier $n + 1$, alors elle est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0.

On désigne par $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n et par n_0 un entier naturel. Pour démonter que pour tout entier naturel $n \geq n_0$ $P(n)$ est vraie on procède en deux étapes :

- Première étape : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie, c'est l'**initialisation**.
- Deuxième étape : on suppose qu'il existe un entier n tel que $P(n)$ soit vraie (c'est l'**hypothèse de récurrence**) et on démontre qu'alors $P(n + 1)$ est vraie. C'est l'**hérédité**.

Exemple

Montrons que pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

La propriété que l'on souhaite montrer dépend d'un entier $n \geq 1$, ici $n_0 = 1$.
Initialisation. Pour $n = 1$, chaque membre de l'égalité vaut 1, donc la propriété est vérifiée au rang initial.
Hérédité. Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \geq 1$ et montrons qu'elle est alors vraie pour $n + 1$. L'hypothèse de récurrence est donc : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, elle permet d'écrire

$$1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On reconnaît alors la propriété annoncée pour l'entier $n + 1$, ce qui prouve que la propriété est héréditaire.
D'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n = 3^n + 1$.

La propriété que l'on souhaite montrer dépend d'un entier $n \geq 0$, ici $n_0 = 0$.
Initialisation. pour $n = 0$ on a $u_0 = 2$ et $3^0 + 1 = 1 + 1 = 2$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité. Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \geq 0$ et montrons qu'alors est vraie pour l'entier $n + 1$. L'hypothèse de récurrence est donc : $u_n = 3^n + 1$. Par définition de la suite, on a $u_{n+1} = 3u_n - 2$ donc en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$u_{n+1} = 3(3^n + 1) - 2 = 3^{n+1} + 3 - 2 = 3^{n+1} + 1$$

ce qui prouve que la propriété est héréditaire.
On a donc démontré par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = 3^n + 1$.

Démontrons une propriété vue dans le cours sur les complexes.

Exemple

Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 1$ et tout complexe z, on a a $|z^n| = |z|^n$.
On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$ c'est clair, chaque membre vaut $|z|$.
Supposons la propriété vraie pour un entier n. Alors d'après un propriété des modules, on a $|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n||z|$ et l'hypothèse de récurrence permet alors d'écrire $|z^n||z| = |z|^n|z| = |z|^{n+1}$, ce qui prouve que la propriété est héréditaire.

2. Limite finie ou infinie d'une suite

❖ **Suites convergentes et suites divergentes**

Définition. *On dit qu'une suite (u_n) a pour* <u>*limite $+\infty$*</u> *si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ et démontrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Soit A un réel. Si $A < 0$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite dès le rang 0.
Si $A \geq 0$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient u_n si et seulement si

$$u_n > A \Leftrightarrow \sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > A^2.$$

Ainsi, si l'on appelle n_0 un entier strictement supérieur à A^2, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient les termes de la suite à partir du rang n_0.

Définition. *On dit qu'une suite (u_n) a pour* <u>*limite $-\infty$*</u> *si la suite $(-u_n)$ a pour limite $+\infty$.*
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Définition. *On dit qu'une suite (u_n) a pour* <u>*limite le réel ℓ*</u> *si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ et démontrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Cet intervalle contient intervalle de la forme $]a; b[$ avec $a < 0 < b$. il suffit donc de montrer qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $]a; b[$.
Soit n_0 un entier supérieur à $\frac{1}{b}$; on a donc $\frac{1}{n_0} \leq b$. Pour tout entier $n \geq n_0$, il vient $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ d'où $\frac{1}{n} \leq a$ et enfin $\frac{1}{n} \in]a; b[$ puisque $\frac{1}{n} > 0$.

Remarque. L'intervalle doit être ouvert dans la définition pour traduire la notion intuitive de limite. Par exemple l'intervalle $[-1; 0]$ contient 0, mais ne contient aucun des termes de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$. Le fait que l'intervalle soit ouvert permet « d'avoir un peu de place » autour de la limite.

Définition. *Une suite (u_n) est dite* <u>*convergente*</u> *si elle admet une limite finie. Elle est dite* <u>*divergente vers $+\infty$*</u> *(resp. $-\infty$) si elle admet pour limite $+\infty$(resp. $-\infty$) et* <u>*divergente*</u> *dans tous les autres cas (c'est-à-dire si elle n'admet pas de limite).*

Remarque. L'écriture $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ signifie que (u_n) converge et a pour limite ℓ.

Théorème. Si une suite admet une limite finie ℓ, cette limite est unique.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers ℓ et supposons qu'elle admet une deuxième limite ℓ', avec $\ell < l'$.
L'intervalle $I_1 = \left]\ell - 1; \frac{\ell+\ell'}{2}\right[$ est ouvert et contient ℓ, donc par définition il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à I_1.
Pour la même raison, il existe un rang n_2 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $I_2 = \left]\frac{\ell+\ell'}{2}; \ell' + 1\right[$.
Pour n plus grand que n_1 et n_2, tous les termes de la suite appartiendraient aux intervalles disjoints I_1 et I_2, c'est impossible.
Ainsi une suite ne peut pas avoir deux limites distinctes. ■

Théorème.
1. Les suites de terme général $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}}$ admettent 0 pour limite.
2. Les suites de terme général n, n^2, $\sqrt{n}$ admettent $+\infty$ pour limite.

La démonstration est analogue aux deux exemples précédents.

❖ **Recherche de seuil**

Lorsqu'une suite admet pour limite un $+\infty$, on peut s'intéresser à la recherche d'un rang à partir duquel $u_n \geq A$ où A est un réel fixé.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n^2+1}{n-1}$ pour $n \geq 2$. On peut démontrer que cette suite admet $+\infty$ comme limite. L'algorithme ci-contre permet de déterminer un rang à partir duquel $u_n \geq 100$.

```
U prend la valeur 5
N prend la valeur 2
Tant que U < 100
   N prend la valeur N + 1
   U prend la valeur (U^2 + 1)/(U − 1)
Fint Tant Que
Afficher N
```

3. Opérations sur les limites

On considère deux suites (u_n) et (v_n). On veut déterminer, sans revenir aux définitions, les limites de $u_n + v_n$, $u_n v_n$ et $\frac{u_n}{v_n}$ à partir de celles de u_n et v_n. Les résultats suivants, intuitifs, donne la réponse, mais il existe des cas où l'on ne peut pas prévoir la limite, ce sont des formes indéterminées.

- Règle sur la somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n} + n^2$ pour $n \geq 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, on en déduit par somme que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- Règle sur le produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$	$\ell\ell'$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

- Règle sur le quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	0 (*)	$\pm\infty$	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$ (**)	0	$\pm\infty$ (**)		

(*) Il faut supposer que $u_n > 0$ ou $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.
(**) Le signe dépend de celui de u_n et v_n lorsque n est grand.

Exemple

Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) définie par $u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+1}$ et $v_n = \frac{2n}{5n^2+3}$.

Réponse. Dans chaque cas, on obtient une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise numérateur et dénominateur par le terme de plus haut degré. On a

$$u_n = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

De même $v_n = \frac{2n}{n^2\left(5+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{2}{n}\times\frac{1}{5+\frac{3}{n^2}}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\frac{3}{n^2}\right)=5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$ il vient par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

4. Théorèmes de comparaison

Théorème. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \le v_n$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration (exigible). On considère un intervalle I de la forme $]A;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier n_1 tel que $n \ge n_1 \Rightarrow u_n \in I$, c'est-à-dire $u_n \ge A$.
Par hypothèse, il existe un entier n_2 tel que $n \ge n_2 \Rightarrow u_n \le v_n$.
Soit N un entier supérieur à n_1 et n_2. Alors pour $n \ge N$, on a $A \le v_n$, ou encore $v_n \in I$.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \ge 1$ par $u_n = n^2 + n\cos n$. On sait que pour tout réel x, on a $-1 \le \cos x \le 1$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n \le n\cos n \le n$. Il en résulte en particulier que $n^2 - n \le u_n$.
Écrivons $n^2 - n = n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$ on déduit par produit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-n) = +\infty$.
Du théorème précédent on déduit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \le v_n$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème (des gendarmes). Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \le v_n \le w_n$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \ge 1$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Puisque $(-1)^n$ vaut soit 1, soit -1, on peut écrire $-1 \le (-1)^n \le 1$, d'où $-\frac{1}{n} \le u_n \le \frac{1}{n}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5. Limite d'une suite géométrique

Théorème. Soit q un réel et (u_n) la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = q^n$.

- Si $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;
- si $q = 1$, la suite (u_n) est constante égale à 1 ;
- si $|q| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$;
- si $q \leq -1$, la suite (u_n) n'a pas de limite.

Démonstration (exigible pour $q > 1$)**.**

1. Si $q = 1$, le résultat est évident. Si $q < -1$, les termes de la suite sont de plus en plus grands en valeur absolue, et l'alternance des signes les empêche de « se stabiliser ». Si $q = -1$, la suite prend alternativement les valeurs -1 et 1, donc n'admet pas de limite.

2. Supposons $q > 1$. Alors on peut écrire $q = 1 + h$ où h est un réel strictement positif. Montrons par récurrence sur n que l'on a $q^n \geq 1 + nh$ pour tout $n \geq 1$.

- C'est clair si $n = 1$;
- Supposons que le résultat soit prouvé pour un certain entier n. Alors
$$q^{n+1} = q^n \times q \geq (1+nh)(1+h) = 1 + nh + h + nh^2 = 1 + (n+1)h + nh^2$$
$$\geq 1 + (n+1)h,$$
l'inégalité résultant du fait que $nh^2 \geq 0$.

Cette inégalité s'appelle inégalité de Bernoulli.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+nh) = +\infty$ on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. Supposons maintenant $|q| < 1$. Si $q = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ puisque la suite est nulle à partir du deuxième terme.

Supposons dorénavant $q \neq 0$. On a $0 < |q| < 1$, d'où $\frac{1}{|q|} > 1$. Ainsi d'après **2.**, la suite (v_n) définie par $v_n = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \frac{1}{|q|^n}$ diverge vers $+\infty$. Il en résulte par passage à l'inverse que la suite de terme général $|q|^n = \frac{1}{v_n}$ tend vers 0.

Pour conclure, il est nécessaire d'utiliser le résultat suivant :

pour tout réel x, on a $-|x| \leq x \leq |x|$.

En effet si $x \geq 0$, comme $|x| = x$, l'inégalité équivaut à $-x \leq x \leq x$, qui est clairement vraie. De même si $x \leq 0$, on a $|x| = -x$ et l'inégalité annoncée équivaut à $x \leq x \leq -x$, ce qui est vérifié.

En prenant $x = q^n$ dans cette inégalité, il vient

$-|q^n| \leq q^n \leq |q^n|$ ou encore $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$.

Le théorème des gendarmes montre alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ puisque l'on vient de voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$. ■

Exemple

Soit $u_n = \frac{5^n+1}{8^n}$. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a $u_n = \left(\frac{5}{8}\right)^n + \frac{1}{8^n}$, or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{5}{8}\right| < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{8^n} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^n = +\infty$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ pour $n \geq 0$.

1. Écrire un algorithme permettant de calculer S_n où n est un entier.
2. Écrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier n tel que
$$u_n > 2 - 10^{-7}.$$
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Réponse.

1. On remarque que $S_0 = 1$ et $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}}$. On peut donc programmer cette suite de la façon suivante.

2. Voici ci-dessous.

Saisir n
u prend la valeur 1
Pour k de 1 à n faire
  u prend la valeur $u + \frac{1}{k^2}$
  n prend la valeur $n + 1$
Fin Pour
Afficher u
	u prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $u \leq 2 - 10^{-7}$ faire
	  u prend la valeur $u + \frac{1}{k^2}$
	  n prend la valeur $n + 1$
	FinPour
	Afficher n

Question 1	Question 2

3. Si l'on pose $u_n = \frac{1}{2^n}$, on peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, donc $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.
Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$.

6. Convergence d'une suite monotone

Définition.

- *Une suite (u_n) est dite <u>majorée</u> s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$.*
- *Une suite (u_n) est dite <u>minorée</u> s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq m$.*
- *Une suite (u_n) est dite <u>bornée</u> si elle est minorée et majorée.*

Exemple

- Les suites de termes général $\sin n$, $\cos n$ et $(-1)^n$ sont majorées par 1 et minorées par -1, elles sont donc bornées.
- La suite définie par $u_n = \sqrt{n}$ est minorée par 0, mais pas majorée. En effet, si M est un majorant (nécessairement positif), on $u_{(M+1)^2} = \sqrt{(M+1)^2} = M + 1 > M$, ce qui contredit le fait que M est un majorant.
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 3 - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.
Pour $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n} \leq 1$ et donc $v_n \leq 3 - 1 = 2$. Clairement $v_n \leq 3$. On peut donc écrire $2 \leq v_n \leq 3$, la suite est bornée.

Théorème. Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante non majorée et A un réel. Puisque A ne majore pas (u_n), il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$, donc par croissante de (u_n), $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq u_{n_0} \geq A$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. ■

Théorème.
- Si une suite est croissante et admet une limite finie, elle est majorée par cette limite.
- Si une suite est décroissante et admet une limite finie, elle est minorée par cette limite.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > l$.
Comme (u_n) est croissante, on en déduit que pour $n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n_0} > l$.
L'intervalle ouvert $\left]\ell - 1; u_{n_0}\right[$ contient ℓ mais ne contient pas les termes à partir du rang n_0.
Ceci montre que ℓ n'est pas la limite de (u_n). Il en résulte que pour tout n, $u_n \leq \ell$. ■

Théorème (de convergence monotone).
- Une suite croissante et majorée converge.
- Une suite décroissante et minorée converge.

Démonstration. Ce théorème se démontre en utilisant une propriété importante de $\mathbb{R}$ (propriété de la borne supérieure) vu en Première Année. ■

Remarque. Un majorant (ou minorant) de la suite n'est pas nécessairement sa limite.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ on a donc $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
3. Montrer que (u_n) converge et déterminer la limite.

Réponse.

1. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{x^2-2}{2x}$. Par conséquent f est décroissante sur $]0; \sqrt{2}[$, croissante sur $[\sqrt{2}\,; +\infty[$, donc f admet en $\sqrt{2}$ un minimum égal à $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
2. Montrons par récurrence la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   Pour $n = 0$, c'est vrai car $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{3}{2}$.
   Supposons la propriété vraie pour un entier n. Comme f est croissante sur $[\sqrt{2}\,; +\infty[$, on a
   $$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow f(\sqrt{2}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Rightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1},$$
   ce qui prouve que la propriété est héréditaire.
   Par le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ donc elle converge vers un réel

$\ell \geq \sqrt{2}$. La suite (u_{n+1}) a pour limite ℓ et la suite $\left(\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)\right)$ a pour limite $\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$ d'après les règles sur les limites. De l'unicité de la limite et de la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$, on déduit $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$, d'où $\ell^2 = 2$ et $\ell = \sqrt{2}$.

Remarque 1. On peut se passer d'une étude de fonction.

1. $\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 \geq \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x^2+2)^2 \geq 8x^2 \Leftrightarrow (x^2-2)^2 \geq 0$, l'élévation au carré étant justifiée par le fait que $x + \frac{2}{x} > 0$.
2. Comme $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n) \geq \sqrt{2}$, on a donc $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n. Il en résulte $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n = \frac{2-u_n^2}{2u_n} \leq 0$.

Remarque 2. Pour tout n, $u_n \in \mathbb{Q}$, et pourtant sa limite $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Cela montre que le théorème précédent ne s'applique qu'aux suites de réels.

Exemple

Considérons la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$; on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrons par récurrence la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-2 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
C'est vrai pour $n = 0$ puisque $u_0 = 1$ et $u_1 = -\frac{1}{2}$. Supposons la propriété vraie pour un entier n. Comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$,

$$-2 \leq u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow f(-2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Rightarrow -2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1},$$

la propriété est donc héréditaire et donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

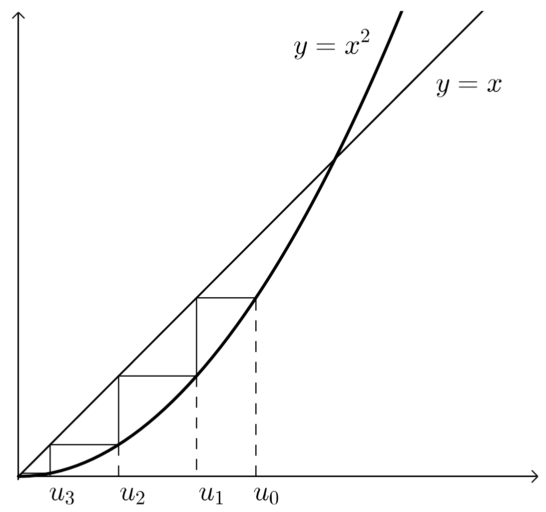
On a donc prouvé que pour tout entier n on a d'une part $-2 \leq u_n$, c'est-à-dire que (u_n) est minorée, et d'autre part que $u_{n+1} \leq u_n$, c'est-à-dire que (u_n) est décroissante. Ainsi cette suite est convergente, soit ℓ sa limite. La suite (u_{n+1}) a pour limite ℓ et la suite $\left(\frac{1}{2}u_n - 1\right)$ a pour limite $\frac{1}{2}\ell - 1$ d'après les règles sur les limites. De l'unicité de la limite et de $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$, on déduit $\ell = \frac{1}{2}\ell - 1$, d'où $\ell = -2$.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2.$$

En appelant f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.



Montrons par récurrence la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.
C'est vrai pour $n = 0$ puisque $u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{9}{4}$.
Supposons la propriété vraie pour un entier n. Comme la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$$

$$\Rightarrow f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3)$$
$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{9}{4},$$
d'où $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3$. La propriété est donc héréditaire et donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

On a donc prouvé que pour tout entier n on a d'une part $0 \leq u_n \leq 3$, ce qui implique en particulier que (u_n) est minorée, et d'autre part que $u_{n+1} \leq u_n$, c'est-à-dire que (u_n) est décroissante (alors que f est croissante !).
Il en résulte que cette suite converge vers un réel ℓ qui vérifie $0 \leq \ell \leq 3$.

La suite (u_{n+1}) a pour limite ℓ et la suite $\left(\frac{1}{4}u_n^2\right)$ a pour limite $\frac{1}{4}\ell^2$ d'après les règles sur les limites. De l'unicité de la limite et de $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$, on déduit l'équation sur ℓ :
$$\ell = \frac{1}{4}\ell^2 \Leftrightarrow 4\ell = \ell^2 \Leftrightarrow 4\ell - \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell(4-\ell) = 0.$$
Ainsi $\ell \in \{0; 4\}$. Comme de plus $0 \leq \ell \leq 3$, on vient de démontrer que $\ell = 0$.

Modifions à présent le premier terme en prenant $u_0 = 5$. On monterait par récurrence que $4 \leq u_n \leq u_{n+1}$, donc que (u_n) est croissante. Si la suite était majorée, elle serait convergente vers un réel ℓ vérifiant $\ell \geq u_0 = 5$. Mais comme les seules valeurs possibles de ℓ sont 0 et 4, cela amène à une contradiction. Ainsi (u_n) n'est pas majorée, et comme elle est croissante, le théorème précédent montre que (u_n) diverge vers $+\infty$.

La conclusion de tout cela est que le comportement d'une suite à l'infini tient à peu de chose ! (ici, son premier terme).