Suites numériques

1. Raisonnement par récurrence

En mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n. Par exemple la proposition suivante :

pour tout entier $n \geq 0$, on a $0 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

ou encore celle ci-dessous.

Exemple introductif

Soit z un nombre complexe fixé. On a admis dans le cours sur les complexes qu'alors, pour tout entier $n \geq 1$, on a $|z^n| = |z|^n$.

- Pour $n = 1$, cette propriété est clairement vraie, chaque membre vaut $|z|$.
- Pour $n = 2$, on peut écrire $|z^2| = |z \times z| = |z| \times |z| = |z|^2$, en utilisant la formule $|zz'| = |z| \times |z'|$.
- Pour $n = 3$, écrivons
$$|z^3| = |z^2 \times z| = |z^2| \times |z|.$$
Or nous venons de voir que $|z^2| = |z|^2$; ainsi
$$|z^3| = |z|^2 \times |z| = |z|^3.$$
On s'est servi du fait que la propriété est vraie pour $n = 2$ pour montrer qu'elle est vraie pour $n = 3$.
- Plus généralement, supposons avoir montré que la propriété est vraie pour un entier $k \geq 1$. Alors est elle également vraie pour l'entier suivant $k + 1$ car
$$|z^{k+1}| = |z^k \times z| = |z^k| \times |z| = |z|^k \times |z| = |z|^{k+1}.$$
On dit que la propriété est **héréditaire**.

On conçoit alors que cela est suffisant pour affirmer que la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$. En effet, dès qu'elle est vraie pour un entier, elle est vraie pour le suivant. Or elle est vraie pour $n = 1$, donc par hérédité, elle est donc vraie pour $n = 2$. Mais comme elle est vraie pour $n = 2$, elle l'est aussi pour $n = 3$ par hérédité, etc.
Le raisonnement par récurrence vise à formaliser cette idée.

Théorème (démonstration par récurrence). Soit une propriété qui dépend d'un entier naturel n.

— Si cette propriété est vraie pour un entier n_0 ;

— s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier k supérieur ou égal à n_0, elle est aussi vraie pour l'entier suivant $k + 1$,

alors elle est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0.

Pour démonter qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on procède en deux étapes :

- **Initialisation**. On vérifie que la propriété est vraie pour n_0.
- **Hérédité.** On suppose qu'il existe un entier $k \geq n_0$ pour lequel la propriété est vraie (c'est l'**hypothèse de récurrence**) et on démontre qu'alors la propriété est vraie pour l'entier $k + 1$.

Exemple introductif (suite)

Soit z un nombre complexe. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a $|z^n| = |z|^n$.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$, cette propriété est vraie puisque chaque membre vaut $|z|$.
- **Hérédité.** Supposons que la propriété soit vraie pour un entier $k \geq 1$, c'est-à-dire que $|z^k| = |z|^k$, et montrons qu'alors elle est vraie pour l'entier suivant $k + 1$.

$$\begin{aligned} \left|z^{\boldsymbol{k+1}}\right| &= |z^k \times z| \\ &= |z^k| \times |z| && \text{car } |zz'| = |z||z'| \\ &= |z|^k \times |z| && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= |z|^{\boldsymbol{k+1}}. \end{aligned}$$

  Cela prouve que la propriété est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exemple

Montrons que pour tout entier $n \geq 0$, on a $0 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, cette propriété est clairement vraie puisque chaque membre vaut 0.
- **Hérédité.** Supposons que la propriété soit vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $0 + 1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, et montrons qu'elle est vraie pour l'entier $k + 1$.

  La somme des entiers de 0 à $k + 1$ peut être découpée en la somme des entiers de 0 à k à laquelle on ajoute $k + 1$:

$$\begin{aligned} 0 + 1 + \cdots + k + (\boldsymbol{k+1}) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} && \text{factorisation par } k+1 \\ &= \frac{(\boldsymbol{k+1})(\boldsymbol{k+1}+1)}{2} \end{aligned}$$

  On obtient bien la formule pour $k + 1$, cela prouve que la propriété est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Montrons que pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n = 3^n + 1$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, d'une part $u_n = u_0 = 2$ et d'autre part $3^0 + 1 = 2$, ce qui montre que la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité.** Supposons que la propriété soit vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $u_k = 3^k + 1$, et montrons qu'elle est vraie pour l'entier $k + 1$. On a

$$\begin{aligned} u_{\boldsymbol{k+1}} &= 3u_k - 2 && \text{par définition de } u_{k+1} \\ &= 3(3^k + 1) - 2 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3 \times 3^k + 3 - 2 \\ &= 3^{\boldsymbol{k+1}} - 2. \end{aligned}$$

  Cela prouve que la propriété est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

2. Limite finie ou infinie d'une suite

❖ Suites convergentes et suites divergentes

Définition. *On dit qu'une suite (u_n) a pour <u>limite $+\infty$</u> si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

<u>Exemple</u>

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ et démontrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Soit A un réel. Si $A < 0$, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite dès le rang 0.
Si $A \geq 0$, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient u_n si et seulement si

$$u_n > A \Leftrightarrow \sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > A^2.$$

Ainsi, si l'on appelle n_0 un entier strictement supérieur à A^2, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient les termes de la suite à partir du rang n_0.

Définition. *On dit qu'une suite (u_n) a pour <u>limite $-\infty$</u> si la suite $(-u_n)$ a pour limite $+\infty$.*
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Définition. *On dit qu'une suite (u_n) a pour <u>limite le réel ℓ</u> si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

<u>Exemple</u>

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ et démontrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Cet intervalle contient intervalle de la forme $]a;b[$ avec $a < 0 < b$. il suffit donc de montrer qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $]a;b[$.
Soit n_0 un entier supérieur à $\frac{1}{b}$; on a donc $\frac{1}{n_0} \leq b$. Pour tout entier $n \geq n_0$, il vient $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ d'où $\frac{1}{n} \leq a$ et enfin $\frac{1}{n} \in]a;b[$ puisque $\frac{1}{n} > 0$.

Remarque. L'intervalle doit être ouvert dans la définition pour traduire la notion intuitive de limite. Par exemple l'intervalle $[-1;0]$ contient 0, mais ne contient aucun des termes de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$. Le fait que l'intervalle soit ouvert permet « d'avoir un peu de place » autour de la limite.

Définition. *Une suite (u_n) est dite <u>convergente</u> si elle admet une limite finie. Elle est dite <u>divergente vers $+\infty$</u> (resp. $-\infty$) si elle admet pour limite $+\infty$(resp. $-\infty$) et <u>divergente</u> dans tous les autres cas (c'est-à-dire si elle n'admet pas de limite).*

Remarque. L'écriture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ signifie que (u_n) converge et a pour limite ℓ.

Théorème. Si une suite admet une limite finie ℓ, cette limite est unique.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers ℓ et supposons qu'elle admet une deuxième limite ℓ', avec $\ell < l'$.
L'intervalle $I_1 = \left]\ell - 1; \frac{\ell+\ell'}{2}\right[$ est ouvert et contient ℓ, donc par définition il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à I_1.
Pour la même raison, il existe un rang n_2 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $I_2 = \left]\frac{\ell+\ell'}{2}; \ell' + 1\right[$.
Pour n plus grand que n_1 et n_2, tous les termes de la suite appartiendraient aux intervalles disjoints I_1 et I_2, c'est impossible.
Ainsi une suite ne peut pas avoir deux limites distinctes. ■

Théorème.
1. Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ admettent 0 pour limite.
2. Les suites de terme général n, n^2, $\sqrt{n}$ admettent $+\infty$ pour limite.

La démonstration est analogue aux deux exemples précédents.

Théorème. Soit (u_n) une suite convergente vers un réel ℓ. Supposons qu'il existe un entier u_n et un réel M tel que $u_n < M$ pour $n \geq n_0$. Alors $\ell \leq M$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et que l'on ait $\ell > M$.
L'intervalle ouvert $I =]M; \ell + 1[$ contient ℓ, donc il existe un entier n_1 tel que pour $n \geq n_1$, on ait $u_n \in I$, donc en particulier, pour $n \geq n_1$, on a $u_n > M$.
C'est un contradiction avec l'hypothèse $u_n < M$ pour $n \geq n_0$. ■

❖ **Recherche de seuil**

Lorsqu'une suite admet pour limite un $+\infty$, on peut s'intéresser à la recherche d'un rang à partir duquel $u_n \geq A$ où A est un réel fixé.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$ pour $n \geq 0$.
On peut démontrer que cette suite admet $+\infty$ comme limite.
L'algorithme ci-contre permet de déterminer un rang à partir duquel $u_n \geq 100$.

```
u ← 4
n ← 0
Tant que u < 100
    u ← 2u − n + 1
    n ← n + 1
Retourner N
```

3. Opérations sur les limites

On considère deux suites (u_n) et (v_n). On veut déterminer, sans revenir aux définitions, les limites de $u_n + v_n$, $u_n v_n$ et $\frac{u_n}{v_n}$ à partir de celles de u_n et v_n. Les résultats suivants, intuitifs, donne la réponse, mais il existe des cas où l'on ne peut pas prévoir la limite, ce sont des formes indéterminées.

➢ Règle sur la somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n} + n^2$ pour $n \geq 1$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, on en déduit par somme que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

➢ Règle sur le produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$	$\ell\ell'$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

➢ Règle sur le quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	0 (*)	$\pm\infty$	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$ (**)	0	$\pm\infty$ (**)		

(*) Il faut supposer que $u_n > 0$ ou $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.
(**) Le signe dépend de celui de u_n et v_n lorsque n est grand.

Exemple

Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) définie par $u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+1}$ et $v_n = \frac{2n}{5n^2+3}$.

Réponse. Dans chaque cas, on obtient une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise numérateur et dénominateur par le terme de plus haut degré. On a

$$u_n = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

De même $v_n = \frac{2n}{n^2\left(5+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{2}{n} \times \frac{1}{5+\frac{3}{n^2}}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(5 + \frac{3}{n^2}\right) = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ il vient par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

4. Théorèmes de comparaison

Théorème. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration (exigible). On considère un intervalle I de la forme $]A; +\infty[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier n_1 tel que $n \geq n_1 \Rightarrow u_n \in I$, c'est-à-dire $u_n \geq A$.

Par hypothèse, il existe un entier n_2 tel que $n \geq n_2 \Rightarrow u_n \leq v_n$.
Soit N un entier supérieur à n_1 et n_2. Alors pour $n \geq N$, on a $A \leq v_n$, ou encore $v_n \in I$.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = n^2 + n\cos n$. On sait que pour tout réel x, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n \leq n\cos n \leq n$. Il en résulte en particulier que $n^2 - n \leq u_n$.
Écrivons $n^2 - n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ on déduit par produit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2 - n) = +\infty$.
Du théorème précédent on déduit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème (des gendarmes). Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Puisque $(-1)^n$ vaut soit 1, soit -1, on peut écrire $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, d'où $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5. Limite d'une suite géométrique

Théorème. Soit q un réel et (u_n) la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = q^n$.
- Si $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;
- si $q = 1$, la suite (u_n) est constante égale à 1 ;
- si $|q| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$;
- si $q \leq -1$, la suite (u_n) n'a pas de limite.

Démonstration (exigible pour $q > 1$).

1. Si $q = 1$, le résultat est évident. Si $q < -1$, les termes de la suite sont de plus en plus grands en valeur absolue, et l'alternance des signes les empêche de « se stabiliser ». Si $q = -1$, la suite prend alternativement les valeurs -1 et 1, donc n'admet pas de limite.

2. Supposons $q > 1$. Alors on peut écrire $q = 1 + h$ où h est un réel strictement positif. Montrons par récurrence sur n que l'on a $q^n \geq 1 + nh$ pour tout $n \geq 1$.
- C'est clair si $n = 1$;
- Supposons que le résultat soit prouvé pour un certain entier n. Alors
$$q^{n+1} = q^n \times q \geq (1 + nh)(1 + h) = 1 + nh + h + nh^2 = 1 + (n+1)h + nh^2$$
$$\geq 1 + (n+1)h,$$
l'inégalité résultant du fait que $nh^2 \geq 0$.

Cette inégalité s'appelle inégalité de Bernoulli.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + nh) = +\infty$ on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. Supposons maintenant $|q| < 1$. Si $q = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ puisque la suite est nulle à partir du deuxième terme.

Supposons dorénavant $q \neq 0$. On a $0 < |q| < 1$, d'où $\frac{1}{|q|} > 1$. Ainsi d'après **2.**, la suite (v_n) définie par $v_n = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \frac{1}{|q|^n}$ diverge vers $+\infty$. Il en résulte par passage à l'inverse que la suite de terme général $|q|^n = \frac{1}{v_n}$ tend vers 0.

Pour conclure, il est nécessaire d'utiliser le résultat suivant :

pour tout réel x, on a $-|x| \leq x \leq |x|$.

En effet si $x \geq 0$, comme $|x| = x$, l'inégalité équivaut à $-x \leq x \leq x$, qui est clairement vraie. De même si $x \leq 0$, on a $|x| = -x$ et l'inégalité annoncée équivaut à $x \leq x \leq -x$, ce qui est vérifié.

En prenant $x = q^n$ dans cette inégalité, il vient

$$-|q^n| \leq q^n \leq |q^n| \text{ ou encore } -|q|^n \leq q^n \leq |q|^n.$$

Le théorème des gendarmes montre alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ puisque l'on vient de voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$. ■

Exemple

Soit $u_n = \frac{5^n+1}{8^n}$. On peut écrire $u_n = \left(\frac{5}{8}\right)^n + \frac{1}{8^n}$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{5}{8}\right| < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{8^n} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^n = +\infty$. Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ pour $n \geq 0$.

1. Écrire un algorithme permettant de calculer S_n où n est un entier.

2. Écrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier n tel que

$$u_n > 2 - 10^{-7}.$$

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Réponse.

1. Il faut remarquer que $S_0 = 1$ et $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.

2. Voici ci-dessous.

$u \leftarrow 1$
Pour k de 1 à n
  $u \leftarrow u + \frac{1}{k^2}$
  $n \leftarrow n + 1$
Retourner u
	$u \leftarrow 1$
	$n \leftarrow 0$
	Tant que $u \leq 2 - 10^{-7}$
	  $u \leftarrow u + \frac{1}{k^2}$
	  $n \leftarrow n + 1$
	Retourner n

Question 1	Question 2

3. Si l'on pose $u_n = \frac{1}{2^n}$, on peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, donc $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.

Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.

6. Convergence d'une suite monotone

Définition.

- *Une suite (u_n) est dite <u>majorée</u> s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$.*
- *Une suite (u_n) est dite <u>minorée</u> s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq m$.*
- *Une suite (u_n) est dite <u>bornée</u> si elle est minorée et majorée.*

<u>Exemple</u>

- Les suites de termes général $\sin n$, $\cos n$ et $(-1)^n$ sont majorées par 1 et minorées par -1, elles sont donc bornées.
- La suite définie par $u_n = \sqrt{n}$ est minorée par 0, mais pas majorée. En effet, si M est un majorant (nécessairement positif), en posant $n_0 = E(M^2) + 1$, on a $n_0 > M^2$ d'où $u_{n_0} = \sqrt{n_0} > \sqrt{M^2} = M$ et donc M n'est pas un majorant de (u_n).
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 3 - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.
  Pour $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n} \leq 1$ et donc $v_n \leq 3 - 1 = 2$. Clairement $v_n \leq 3$. On peut donc écrire $2 \leq v_n \leq 3$, la suite est bornée.

Théorème. Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante non majorée et A un réel. Puisque A ne majore pas (u_n), il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$, donc par croissante de (u_n), $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq u_{n_0} \geq A$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. ■

Théorème.

- Si une suite est croissante et admet une limite finie, elle est majorée par cette limite.
- Si une suite est décroissante et admet une limite finie, elle est minorée par cette limite.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > l$.
Comme (u_n) est croissante, on en déduit que pour $n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n_0} > l$.
L'intervalle ouvert $]\ell - 1; u_{n_0}[$ contient ℓ mais ne contient pas les termes à partir du rang n_0.
Ceci montre que ℓ n'est pas la limite de (u_n). Il en résulte que pour tout n, $u_n \leq \ell$. ■

Théorème (de convergence monotone).

- Une suite croissante et majorée converge.
- Une suite décroissante et minorée converge.

Démonstration. Ce théorème se démontre en utilisant une propriété importante de $\mathbb{R}$ (propriété de la borne supérieure) vu en Première Année. ■

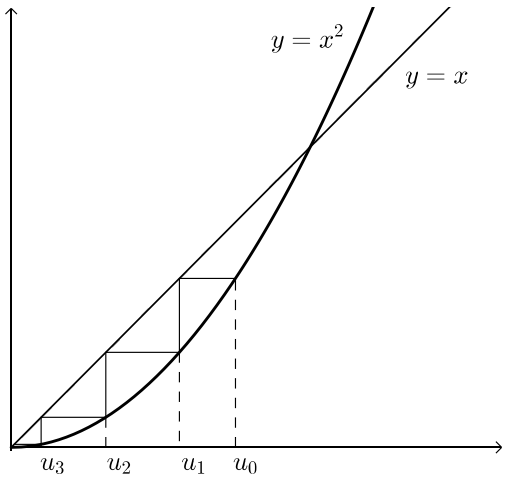
Remarque. Un majorant (ou minorant) de la suite n'est pas nécessairement sa limite. En effet si M est un majorant, $M + 1$ en est également un !

<u>Exemple</u>

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2.$$

En appelant f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.



Montrons par récurrence la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.
C'est vrai pour $n = 0$ puisque $u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{9}{4}$.
Supposons la propriété vraie pour un entier n.
Comme la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3 \Rightarrow f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3) \Rightarrow 0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{9}{4},$$

d'où $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3$.
La propriété est donc héréditaire et donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

On a donc prouvé que pour tout entier n on a d'une part $0 \leq u_n \leq 3$, ce qui implique en particulier que (u_n) est minorée, et d'autre part que $u_{n+1} \leq u_n$, c'est-à-dire que (u_n) est décroissante (alors que f est croissante !).
Il en résulte que cette suite converge vers un réel ℓ qui vérifie $0 \leq \ell \leq 3$.

La suite (u_{n+1}) a pour limite ℓ et la suite $\left(\frac{1}{4}u_n^2\right)$ a pour limite $\frac{1}{4}\ell^2$ d'après les règles sur les limites. De l'unicité de la limite et de $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$, on déduit l'équation sur ℓ :

$$\ell = \frac{1}{4}\ell^2 \Leftrightarrow 4\ell = \ell^2 \Leftrightarrow 4\ell - \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell(4 - \ell) = 0.$$

Ainsi $\ell \in \{0; 4\}$. Comme de plus $0 \leq \ell \leq 3$, on vient de démontrer que $\ell = 0$.

Modifions à présent le premier terme en prenant $u_0 = 5$. On monterait par récurrence que $4 \leq u_n \leq u_{n+1}$, donc que (u_n) est croissante. Si la suite était majorée, elle serait convergente vers un réel ℓ vérifiant $\ell \geq u_0 = 5$. Mais comme les seules valeurs possibles de ℓ sont 0 et 4, cela amène à une contradiction. Ainsi (u_n) n'est pas majorée, et comme elle est croissante, le théorème précédent montre que (u_n) diverge vers $+\infty$.

La conclusion de tout cela est que le comportement d'une suite à l'infini tient à peu de chose ! (ici, son premier terme).

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ on a donc $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
3. Montrer que (u_n) converge et déterminer la limite.

Réponse.

1. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{x^2-2}{2x}$. Par conséquent f est décroissante sur $]0; \sqrt{2}[$, croissante sur $[\sqrt{2}\,; +\infty[$, donc f admet en $\sqrt{2}$ un minimum égal à $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

2. Montrons par récurrence la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
Pour $n = 0$, c'est vrai car $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{3}{2}$.
Supposons la propriété vraie pour un entier n. Comme f est croissante sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$, on a
$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow f(\sqrt{2}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Rightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1},$$
ce qui prouve que la propriété est héréditaire.
Par le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ donc elle converge vers un réel $\ell \geq \sqrt{2}$. La suite (u_{n+1}) a pour limite ℓ et la suite $\left(\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)\right)$ a pour limite $\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$ d'après les règles sur les limites. De l'unicité de la limite et de la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$, on déduit $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$, d'où $\ell^2 = 2$ et $\ell = \sqrt{2}$.

Remarque 1. On peut se passer d'une étude de fonction.

1. $\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 \geq \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x^2+2)^2 \geq 8x^2 \Leftrightarrow (x^2-2)^2 \geq 0$,
l'élévation au carré étant justifiée par le fait que $x + \frac{2}{x} > 0$.
2. Comme $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n) \geq \sqrt{2}$, on a donc $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n. Il en résulte $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n = \frac{2-u_n^2}{2u_n} \leq 0$.

Remarque 2. Pour tout n, $u_n \in \mathbb{Q}$, et pourtant sa limite $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Cela montre que le théorème précédent ne s'applique qu'aux suites de réels.

Exemple

Considérons la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$; on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrons par récurrence la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-2 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
C'est vrai pour $n = 0$ puisque $u_0 = 1$ et $u_1 = -\frac{1}{2}$. Supposons la propriété vraie pour un entier n. Comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$,
$$-2 \leq u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow f(-2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Rightarrow -2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1},$$
la propriété est donc héréditaire et donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

On a donc prouvé que pour tout entier n on a d'une part $-2 \leq u_n$, c'est-à-dire que (u_n) est minorée, et d'autre part que $u_{n+1} \leq u_n$, c'est-à-dire que (u_n) est décroissante. Ainsi cette suite est convergente, soit ℓ sa limite. La suite (u_{n+1}) a pour limite ℓ et la suite $\left(\frac{1}{2}u_n - 1\right)$ a pour limite $\frac{1}{2}\ell - 1$ d'après les règles sur les limites. De l'unicité de la limite et de $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$, on déduit $\ell = \frac{1}{2}\ell - 1$, d'où $\ell = -2$.