Suites numériques – Exercices

Révision sur les suites

1 Calculer les 4 premiers termes des suites suivantes et écrire un algorithme permettant de calculer u_{10}.

1. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$
2. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{n}{u_n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 1, u_2 = 2$ et $u_{n+2} = nu_n + u_{n+1}$ pour $n \geq 1$.

2 On étudie deux contrats de travail.

- Contrat A : le salaire mensuel est de 1200€ au 1er janvier 2015 et augmente de 70€ au premier janvier de chaque année.
- Contrat B : le salaire mensuel est de 1000€ au 1er janvier 2015 et augmente de 8% au premier janvier de chaque année.

On note u_n le salaire mensuel du contrat A et v_n le salaire mensuel du contrat B, en l'année $2015 + n$.

1. Calculer les 4 premiers termes de (u_n). Quelle est la nature de (u_n) ? Donner le salaire mensuel en 2037 et calculer l'argent gagné entre janvier 2015 et décembre 2037.
2. Mêmes questions avec (v_n).

3 $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$. Soit $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 puis v_0, v_1, v_2, v_3.
2. Démontrer que (v_n) est arithmétique.
3. En déduire l'expression de (v_n), puis celle de (u_n), en fonction de n.

Raisonnement par récurrence

4 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = -2u_n + 9.$$

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = (-2)^{n+1} + 3.$$

5 (Importance de l'initialisation).

1. Montrer que les deux propositions « $10^n - 1$ est un multiple de 9 » et « $10^n + 1$ est un multiple de 9 » sont héréditaires.
2. Sont-elles vraies pour tout n ?

6 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

1. Calculer les 4 premiers termes.
2. Écrire un algorithme permettant de calculer u_{20} et le programmer.
3. Émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n. La démontrer par récurrence.

7 (D'après bac juin 2013 Métropole). Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite. Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation ?
2. **a.** Montrer que pour tout entier n on a $u_n \leq n + 3$.
   b. Montrer que pour tout entier n on a
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$
   et en déduire le sens de variation de (u_n).
3. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = u_n - n$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

8 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right)$$

1. Étudier les variations sur $]0; +\infty[$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$ et en déduire que
   $$\forall x \in [2; 4], f(x) \in [2; 4].$$
2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2; 4]$.

9 Démontrer que pour entier naturel n on a

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

10 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$1 - 3 + 5 - \cdots + (-1)^{n-1}(2n - 1) = n(-1)^{n-1}.$$

11 (Récurrence forte). On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$, $u_1 = 7$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n.$$

On veut montrer que pour tout entier n on a

$$u_n = 5^n + 2^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère pour la proposition P_n « pour tout entier $k \leq n$, $u_k = 5^k + 2^k$ ».

1. Montrer P_0 et P_1 sont vraies.
2. Montrer que P_n est héréditaire à partir du rang 2 et conclure.

12 On considère la propriété (notée P_n) : pour tout $n \geq 1$ et tout k tel que $1 \leq k \leq n$ on a $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

1. Montrer que P_1 est vraie.
2. Justifier que $k\binom{n+1}{k} = (k - 1 + 1)\binom{n}{k-1} + k\binom{n}{k}$ puis montrer que P_n est héréditaire.

Définition des limites de suites

13 À partir de quel entier n la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 4n + 3$ est-elle supérieure à 200 ?

14 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = 3n^2$.

1. À partir de quel rang a-t-on $u_n \geq 300$?
2. À partir de quel rang a-t-on $u_n \geq 10000$?

15 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \frac{7}{n+1}$.

1. À partir de quel rang a-t-on $0 < u_n \leq 0{,}01$?
2. À partir de quel rang a-t-on $0 < u_n \leq 0{,}0001$?

16 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$..

1. À partir de quel rang a-t-on $0 < u_n \leq 0{,}01$?
2. À partir de quel rang a-t-on $0 < u_n \leq 0{,}0001$?

17 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$.

1. Pour quels rangs a-t-on $u_n \in]1{,}99 ; 2{,}01[$?
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

18 Vrai ou faux. Justifier.

a. Si $u_n = 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

c. Toute suite à termes strictement positifs qui converge vers 0 est décroissante.

d. Toute suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

e. Si (u_n) converge vers 1 et si (v_n) converge vers 2, alors à partir d'un certain rang $u_n < v_n$.

f. Si (u_n) converge vers ℓ et qu'à partir d'un certain rang on a $u_n < M$, alors $\ell < M$.

Opérations sur les limites

19 Déterminer les limites des suites suivantes.

a. $u_n = (1-n)(n+3)$ **b.** $u_n = \frac{2}{1+n}$

c. $u_n = 3n + 1 - \frac{4}{\sqrt{n}}$ **d.** $u_n = \left(\frac{1}{n} - 3\right)^2$

20 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par
$$u_n = \frac{2}{n}(1+n^2) \text{ et } v_n = 3n^2 - 5n.$$

1. Déterminer la limite de u_n.

2. Déterminer la limite de v_n.

21 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ suivantes.

a. $u_n = -n^2 + \sqrt{n}$ **b.** $u_n = -3n^2 + 7n$

c. $u_n = \frac{2n+1}{3n^2+1}$ **d.** $u_n = \frac{-3n^2-n+7}{2n^2-1}$

e. $u_n = \frac{4n^3-5}{2n^2+1}$ **f.** $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(-4n+3)$

g. $u_n = \frac{5-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$ **h.** $u_n = \frac{1+\sqrt{n}}{3n^2}$

22 Vrai ou faux. Justifier.

a. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

b. Si (u_n) est une suite à termes strictement positifs telle que $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge, alors elle est convergente.

c. Si (u_n) est une suite convergente et (v_n) une suite divergente, alors $(u_n v_n)$ est une suite divergente.

d. Si $(u_n v_n)$ converge vers un réel et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

23 On souhaite étudier la convergence de $(\sin n)_{n\geq 0}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

  a. $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$

  b. $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin 1 \cos n$

2. On pose $u_n = \sin n$ et $v_n = \cos n$. On suppose que (u_n) a une limite ℓ.

  a. De la relation 1.b. déduire que (v_n) converge et préciser sa limite.

  b. Déduire alors de 2.a. que $\ell = 0$.

  c. En considérant $u_n^2 + v_n^2$ montrer que $\ell^2 = 1$.

  d. Conclure que ni (u_n), ni (v_n) ne converge.

Théorèmes de comparaison

24 Déterminer les limites des suites suivantes.

a. $u_n = 2n - \cos n$ **b.** $u_n = n^2 + 3(-1)^n$

c. $u_n = \frac{n+\cos n}{n+1}$ **d.** $u_n = \frac{\cos^2 n}{2n+\cos n}$

e. $u_n = \frac{-n+(-1)^n}{2+4n}$ **f.** $u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+n}{n^2}$

25 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Si $u_n > \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$ et si (u_n) converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$.

b. Toute suite vérifiant $1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n}$ (pour tout $n \geq 1$) converge vers un réel $\ell \in [1;2]$.

c. Si $0 < u_n < 1$ et $0 < v_n < 1$ pour tout n et si $(u_n v_n)$ converge vers 1, alors (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

26 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par
$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 3u_n + n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que $u_n \geq n+2$ et déterminer la limite de (u_n).

2. Démontrer que pour tout entier n,
$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}.$$

Limite d'une suite géométrique

27 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ suivantes.

a. $u_n = \left(\frac{12}{17}\right)^n$ **b.** $u_n = \frac{2\times 4^n}{5^n}$

c. $u_n = \frac{(-1)^n}{4\times(-0{,}1)^n}$ **d.** $u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

28 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ suivantes.

a. $u_n = 5^n - 3^n$ **b.** $u_n = 3^n + (-2)^n - 7$

c. $u_n = 0{,}71^n \sin\frac{1}{n^3}$ **d.** $u_n = \frac{1}{n} \times \sin(-2)^n$

29 Déterminer les limites des suites suivantes.

a. $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

b. $u_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$

30 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par
$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n^2 + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. a. Développer $(2^n - 1)^2$ puis démontrer l'inégalité $2^{2n} + 1 \geq 2^{n+1}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  b. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geq 2^n$.

2. Déterminer la limite de (u_n).

31 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par
$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

4. Écrire et programmer un algorithme qui demande en entrée un réel M avec $0 \leq M < 2$ et qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que
$$n \geq n_0 \Rightarrow M \leq u_n \leq 2.$$

32 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par
$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Afficher les 10 premiers termes de (u_n) sur la calculatrice. Quelle semble être la limite de (u_n) ?

2. Démontrer que pour tout entier n, $u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$.

3. Démontrer la conjecture de la question 1.

Convergence des suites monotones

33 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors la suite (u_n) n'est pas bornée.

b. Toute suite croissante est minorée.

c. Si pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n \geq 0{,}001$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est une suite convergente

34 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 12$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

1. En étudiant la fonction $f: x \mapsto \frac{3}{4}x + 2$ montrer que $x \in [8;12] \Rightarrow f(x) \in [8;12]$.
   En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \in [8;12]$.
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
3. En déduire que (u_n) est convergente. Montrer que la limite ℓ de (u_n) vérifie $\ell = \frac{3}{4}\ell + 2$ et en déduire la valeur de ℓ.

35 Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \text{ pour } n \geq 0.$$

1. Si la suite converge, quelles sont les valeurs possibles de sa limite ℓ ?
2. Montrer que $3 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudier les variations de (u_n).
4. Prouver que (u_n) converge et déterminer sa limite.

36 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a
   $$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
2. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
3. Montrer alors que (u_n) est convergente. Que peut-on dire de sa limite ?

37 Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$.

1. En étudiant la fonction $f_n: x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ montrer que l'équation admet une unique solution u_n dans $[0;1]$.
2. Calculer u_1 et u_2. Utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée à 10^{-3} de u_3 et u_4.
3. Montrer que $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1}$ et en déduire le sens de variation de (u_n) puis démontrer qu'elle converge.
4. Montrer que pour tout n, $u_n - \frac{1}{2} = \frac{u_n^{n+1}}{2}$ et en déduire la limite de (u_n).

Problèmes

38 Sur une droite D munie d'un repère $(O;\vec{\imath})$, on considère la suite de point (A_n) ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note a_n l'abscisse de A_n.

1. En prenant 10 cm comme unité, représenter les points A_i pour $0 \leq i \leq 5$ et calculer les a_i correspondants.
2. Justifier l'égalité : $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ pour tout n.
3. Montrer que $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$ pour tout n.
4. Soit $u_n = a_n - \frac{2}{3}$. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
5. En déduire la limite de (u_n) puis celle de (a_n).

39 On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Écrire un algorithme affichant, pour un entier $n \geq 0$ donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
2. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $0 < v_n < 3$.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}.$$
   La suite (v_n) est-elle monotone ?
   c. Montrer que (v_n) est convergente.
3. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.
   a. Montrer que (w_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
   b. En déduire l'expression de (w_n) puis celle de (v_n) en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de (v_n).

40 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a $u_n \geq 0$.
2. On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Saisir M
n prend la valeur 0
u prend la valeur 1
Tant que u < M
  u prend la valeur 1/2 u + n − 1
  n prend la valeur n + 1
Fin Tant que
Afficher n
```

   a. Programmer l'algorithme suivant et l'exécuter avec $M = 5$, 100 et 1000.
   b. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement de (u_n) ?
   c. Montrer que $u_n \geq n - 2$ pour tout $n \geq 4$.
   d. En déduire la limite de (u_n).
3. On pose $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
   a. Démontrer que (v_n) est géométrique.
   b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{7}{2^n} + 2n - 6$.
   c. Vérifier que $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera les raisons et les premiers termes.
   d. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

41 *(2012, Polynésie).* On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par
   $$v_n = u_n - n + 1.$$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n = 3^n + n - 1.$$
5. Soit p un entier naturel non nul.
   a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n \geq 10^p$?
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
   b. Justifier que $n_0 \leq 3p$.
   c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.
   d. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus

petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$.

42 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$.

a. Étudier les variations de f et montrer que si $x \in]0;1[$ alors $f(x) \in]0;1[$.

b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 < u_n < 1 \text{ et } u_n < u_{n+1}.$$

c. En déduire que (u_n) est convergente vers un réel ℓ. Expliquer pourquoi $\ell = f(\ell)$ et calculer ℓ.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

a. Démontrer que (v_n) est géométrique de raison 3.

b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. En déduire que pour tout n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

d. Déterminer la limite de (u_n).

43 *(2013, Nouvelle-Calédonie).* Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N, K sont des entiers
	U, V, W sont des réels
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter $K + 1$ à K
	Affecter U à W
	Affecter $\frac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\frac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Compléter le tableau ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

Partie B

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n,
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n).$$

b. On pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b. Déduire des résultats des questions 1.b. et 2.a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.

c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

44 *(2013, Antilles-Guyane).* On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + i$ et, pour tout entier naturel n, par $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}$.
Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + ib_n$, où a_n et b_n sont réels.
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.

2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A et B des nombres réels
	K et N des nombres entiers
Initialisation :	Affecter à A la valeur 1
	Affecter à B la valeur 1
Traitement :	
Entrer la valeur de N	
Pour K variant de 1 à N	
Affecter à A la valeur $\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{3}$	
Affecter à B la valeur $\frac{B}{3}$	
FinPour	
Afficher A	

a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
En déduire les expressions de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).

3. a. On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' on a $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$
En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leq u_n$.
En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.