Suites numériques – Exercices

Révision sur les suites

1 Calculer les 4 premiers termes des suites suivantes et écrire un algorithme permettant de calculer u_{10}.

1. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$
2. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{n}{u_n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 1, u_2 = 2$ et $u_{n+2} = nu_n + u_{n+1}$ pour $n \geq 1$.

2 On étudie deux contrats de travail.

- Contrat A : le salaire mensuel est de 1200€ au 1er janvier 2015 et augmente de 70€ au premier janvier de chaque année.
- Contrat B : le salaire mensuel est de 1000€ au 1er janvier 2015 et augmente de 8% au premier janvier de chaque année.

On note u_n le salaire mensuel du contrat A et v_n le salaire mensuel du contrat B, en l'année $2015 + n$.

1. Calculer les 4 premiers termes de (u_n). Quelle est la nature de (u_n) ? Donner le salaire mensuel en 2037 et calculer l'argent gagné entre janvier 2015 et décembre 2037.
2. Mêmes questions avec (v_n).

3 $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$. Soit $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 puis v_0, v_1, v_2, v_3.
2. Démontrer que (v_n) est arithmétique.
3. En déduire l'expression de (v_n), puis celle de (u_n), en fonction de n.

Raisonnement par récurrence

4 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 9.$$
Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^{n+1} + 3.$$

5 (Importance de l'initialisation).

1. Montrer que les deux propositions « $10^n - 1$ est un multiple de 9 » et « $10^n + 1$ est un multiple de 9 » sont héréditaires.
2. Sont-elles vraies pour tout n ?

6 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par
$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

1. Calculer les 4 premiers termes.
2. Écrire un algorithme permettant de calculer u_{20} et le programmer.
3. Émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n. La démontrer par récurrence.

7 (D'après bac juin 2013 Métropole). Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite. Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation ?
2. **a.** Montrer que pour tout entier n on a $u_n \leq n + 3$.
   b. Montrer que pour tout entier n on a
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$
   et en déduire le sens de variation de (u_n).
3. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = u_n - n$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

8 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right)$$

1. Étudier les variations sur $]0; +\infty[$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$ et en déduire que
   $$\forall x \in [2; 4], f(x) \in [2; 4].$$
2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2; 4]$.

9 Démontrer que pour entier naturel n on a
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

10 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$
$$1 - 3 + 5 - \cdots + (-1)^{n-1}(2n - 1) = n(-1)^{n-1}.$$

11 (Récurrence forte). On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$, $u_1 = 7$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n.$$
On veut montrer que pour tout entier n on a
$$u_n = 5^n + 2^n.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère pour la proposition P_n « pour tout entier $k \leq n$, $u_k = 5^k + 2^k$ ».

1. Montrer P_0 et P_1 sont vraies.
2. Montrer que P_n est héréditaire à partir du rang 2 et conclure.

12 Pour tout entier naturel n, on considère la propriété
$$2^n \geq n^2.$$

1. Donner un entier n_0 pour lequel cette propriété est fausse.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 \geq (x + 1)^2$ et en déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a,
   $$2n^2 \geq (n + 1)^2.$$
3. Démontrer alors par récurrence que pour tout entier $n \geq n_0 + 1$, la propriété est vraie.

Définition des limites de suites

14 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = 3n^2$.

1. À partir de quel rang a-t-on $u_n \geq 300$?
2. À partir de quel rang a-t-on $u_n \geq 10000$?

15 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \frac{7}{n+1}$.

1. À partir de quel rang a-t-on $0 < u_n \leq 0{,}01$?
2. À partir de quel rang a-t-on $0 < u_n \leq 0{,}0001$?

16 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$.

1. Pour quels rangs a-t-on $u_n \in]1{,}99 ; 2{,}01[$?
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

17 Vrai ou faux. Justifier.

a. Si $u_n = 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
b. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

c. Toute suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

d. Si (u_n) converge vers 1 et si (v_n) converge vers 2, alors à partir d'un certain rang $u_n < v_n$.

e. Si (u_n) converge vers ℓ et qu'à partir d'un certain rang on a $u_n < M$, alors $\ell < M$.

f. Toute suite à termes strictement positifs qui converge vers 0 est décroissante.

Opérations sur les limites

18 Déterminer les limites des suites suivantes.

a. $u_n = (1-n)(n+3)$ **b.** $u_n = \frac{2}{1+n}$

c. $u_n = 3n + 1 - \frac{4}{\sqrt{n}}$ **d.** $u_n = \left(\frac{1}{n} - 3\right)^2$

19 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par

$$u_n = \frac{2}{n}(1+n^2) \text{ et } v_n = 3n^2 - 5n.$$

1. Déterminer la limite de u_n.

2. Déterminer la limite de v_n.

20 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ suivantes.

a. $u_n = -n^2 + \sqrt{n}$ **b.** $u_n = -3n^2 + 7n + 4$

c. $u_n = \frac{2n+1}{3n^2+1}$ **d.** $u_n = \frac{-3n^2-n+7}{2n^2-1}$

e. $u_n = \frac{4n^3-5}{2n^2+1}$ **f.** $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(-4n+3)$

g. $u_n = \frac{5-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$ **h.** $u_n = \frac{1+\sqrt{n}}{3n^2}$

21 Vrai ou faux. Justifier.

a. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

b. Si (u_n) est une suite à termes strictement positifs telle que $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge, alors elle est convergente.

c. Si (u_n) est une suite convergente et (v_n) une suite divergente, alors $(u_n v_n)$ est une suite divergente.

d. Si $(u_n v_n)$ converge vers un réel et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

22 On souhaite étudier la convergence de $(\sin n)_{n\geq 0}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

  a. $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$

  b. $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \sin 1 \cos n$

2. On pose $u_n = \sin n$ et $v_n = \cos n$. On suppose que (u_n) a une limite ℓ.

  a. De la relation 1.b. déduire que (v_n) converge et préciser sa limite.

  b. Déduire alors de 2.a. que $\ell = 0$.

  c. En considérant $u_n^2 + v_n^2$ montrer que $\ell^2 = 1$.

  d. Conclure que ni (u_n), ni (v_n) ne converge.

Théorèmes de comparaison

23 Déterminer les limites des suites suivantes.

a. $u_n = 2n - \cos n$ **b.** $u_n = n^2 + 3(-1)^n$

c. $u_n = \frac{n+\cos n}{n+1}$ **d.** $u_n = \frac{\cos^2 n}{2n+\cos n}$

e. $u_n = \frac{-n+(-1)^n}{2+4n}$ **f.** $u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+n}{n^2}$

24 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Si $u_n > \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$ et si (u_n) converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$.

b. Toute suite vérifiant $1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n}$ (pour tout $n \geq 1$) converge vers un réel $\ell \in [1; 2]$.

c. Si $0 < u_n < 1$ et $0 < v_n < 1$ pour tout n et si $(u_n v_n)$ converge vers 1, alors (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

25 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 3u_n + n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que $u_n \geq n + 2$ et déterminer la limite de (u_n).

2. Démontrer que pour tout entier n,

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}.$$

Limite d'une suite géométrique

26 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ suivantes.

a. $u_n = \left(\frac{12}{17}\right)^n$ **b.** $u_n = \frac{2\times 4^n}{5^n}$

c. $u_n = \frac{(-1)^n}{4\times(-0{,}1)^n}$ **d.** $u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

27 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ suivantes.

a. $u_n = 5^n - 3^n$ **b.** $u_n = 3^n + (-2)^n - 7$

c. $u_n = 0{,}71^n \sin\frac{1}{n^3}$ **d.** $u_n = \frac{1}{n} \times \sin(-2)^n$

28 Déterminer les limites des suites suivantes.

a. $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

b. $u_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$

29 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n^2 + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. a. Développer $(2^n - 1)^2$ puis démontrer l'inégalité $2^{2n} + 1 \geq 2^{n+1}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  b. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geq 2^n$.

2. Déterminer la limite de (u_n).

30 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par
$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

4. Écrire et programmer un algorithme qui demande en entrée un réel M avec $0 \leq M < 2$ et qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow M \leq u_n \leq 2.$$

31 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Afficher les 10 premiers termes de (u_n) sur la calculatrice. Quelle semble être la limite de (u_n) ?

2. Démontrer que pour tout entier n, $u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$.

3. Démontrer la conjecture de la question 1.

Convergence des suites monotones

32 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors la suite (u_n) n'est pas bornée.

b. Toute suite croissante est minorée.

c. Si pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n \geq 0{,}001$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est une suite convergente

33 Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \text{ pour } n \geq 0.$$

1. Si la suite converge, quelles sont les valeurs possibles de sa limite ℓ ?
2. Montrer que $3 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudier les variations de (u_n).
4. Prouver que (u_n) converge et déterminer sa limite.

34 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$
1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a
$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
2. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
3. Montrer alors que (u_n) est convergente. Que peut-on dire de sa limite ?

35 Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$.
1. En étudiant la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ montrer que l'équation admet une unique solution u_n dans $[0; 1]$.
2. Calculer u_1 et u_2. Utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée à 10^{-3} de u_3 et u_4.
3. Montrer que $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1}$ et en déduire le sens de variation de (u_n) puis démontrer qu'elle converge.
4. Montrer que pour tout n, $u_n - \frac{1}{2} = \frac{u_n^{n+1}}{2}$ et en déduire la limite de (u_n).

Problèmes

36 Sur une droite D munie d'un repère $(O; \vec{\imath})$, on considère la suite de point (A_n) ainsi définie :
- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note a_n l'abscisse de A_n.
1. En prenant 10 cm comme unité, représenter les points A_i pour $0 \leq i \leq 5$ et calculer les a_i correspondants.
2. Justifier l'égalité : $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ pour tout n.
3. Montrer que $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$ pour tout n.
4. Soit $u_n = a_n - \frac{2}{3}$. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
5. En déduire la limite de (u_n) puis celle de (a_n).

37 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par
$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a $u_n \geq 0$.
2. On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Saisir M
n prend la valeur 0
u prend la valeur 1
Tant que u < M
  u prend la valeur (1/2)u + n − 1
  n prend la valeur n + 1
Fin Tant que
Afficher n
```

a. Programmer l'algorithme suivant et l'exécuter avec $M = 5$, 100 et 1000.
b. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement de (u_n) ?
c. Montrer que $u_n \geq n - 2$ pour tout $n \geq 4$.
d. En déduire la limite de (u_n).

3. On pose $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
   a. Démontrer que (v_n) est géométrique.
   b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{7}{2^n} + 2n - 6$.
   c. Vérifier que $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera les raisons et les premiers termes.
   d. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

38 *(2012, Polynésie).* On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par
$$v_n = u_n - n + 1.$$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 3^n + n - 1.$$
5. Soit p un entier naturel non nul.
   a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n \geq 10^p$?
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
   b. Justifier que $n_0 \leq 3p$.
   c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.
   d. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$.

39 *(2013, Nouvelle-Calédonie).* Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et
$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Partie A

On considère l'algorithme ci-contre.
On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

```
Affecter 0 à K
Affecter 2 à U
Affecter 10 à V
Saisir N
Tant que K < N
  Affecter K + 1 à K
  Affecter U à W
  Affecter (2U+V)/3 à U
  Affecter (W+3V)/4 à V
Fin tant que
Afficher U, V
```

K	W	U	V
0			
1			
2			

Partie B

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n,
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n).$$
   b. On pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.
2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
   b. Déduire des résultats des questions 1.b. et 2.a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.
   c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.
4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
   En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

40 *(2017, Pondichéry).* On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 2^n$.

Partie A – Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-contre.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16
…	…	…	…
12	10	3080	1024
13	11	6153	2048
14	12	12298	4096
15	13	24587	8192

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Conjecturer les limites des suites (u_n) et (v_n).

Partie B – Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C – Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

41 *(2016, métropole).* On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

1. **a.** Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = i$. Déterminer les nombres z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.
   Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de n ?
   Prouver cette conjecture.
2. Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + i$.
3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

42 *(2013, Antilles-Guyane).* On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + i$ et, pour tout entier naturel n, par $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + ib_n$, où a_n et b_n sont réels.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.
2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

```
Affecter à A la valeur 1
Affecter à B la valeur 1
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
   Affecter à A la valeur (A+√(A²+B²))/3
   Affecter à B la valeur B/3
FinPour
Afficher A
```

   a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

   b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   En déduire les expressions de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).
3. **a.** On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' on a $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}$.
   b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$
   En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.
   c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leq u_n$.
   En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

43 *(2017, Nouvelle-Calédonie).* On considère la suite (u_n) définie par

- $u_0 = 0$
- $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$ pour tout entier $n \geq 0$

On obtient ci-contre à l'aide d'un tableur les premiers termes de la suite.

Prouver que la suite converge.

	A	B	C
1		u_n	u_n
2	n	(valeurs exactes)	(valeurs approchées)
3	0	0	0
4	1	1/2	0,5
5	2	2/3	0,6667
6	3	3/4	0,75
7	4	4/5	0,8
8	5	5/6	0,8333
9	6	6/7	0,8571
10	7	7/8	0,875
11	8	8/9	0,8889
12	9	9/10	0,9
13	10	10/11	0,9091