Rappel sur les suites

Définition. *Une <u>suite numérique</u> u, notée plus souvent (u_n) est une fonction dont la variable est un entier naturel. L'image d'un entier n n'est pas notée $u(n)$ mais u_n et se lit « u indice n ». On dit que u_n est le <u>terme général</u> de la suite et que n est le <u>rang</u> de ce terme.*

Les manières les plus courantes de définir une suite sont les suivantes.

- *Par une fonction*
  On se donne une fonction f, la suite est définie par $u_n = f(n)$.

<u>Exemple</u>

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$.
Soit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 2n + 1$. C'est la suite des entiers naturels impairs.

- *Par une relation de récurrence*
  Une suite est définie par récurrence quand elle définie par la donnée :
  - de son premier terme ;
  - d'une relation qui permet de calcul un terme à partir du précédent. Cette relation est appelée relation de récurrence.

<u>Exemple</u>

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
On a $u_1 = 3u_0 - 2 = 4$, $u_2 = 3u_1 - 2 = 10$, $u_3 = 3u_2 - 2 = 28$ etc.

Sens de variation

Définition. *La suite (u_n) est dite <u>décroissante</u> si pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$*
La suite (u_n) est dite <u>croissante</u> si pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$
La suite (u_n) est dite <u>constante</u> si pour tout n, $u_{n+1} = u_n$
La suite (u_n) est dite <u>monotone</u> si elle est croissante, décroissante ou constante.

Remarque. Une suite peut être monotone « à partir d'un certain rang », c'est-à-dire qu'il existe un entier n_0 tel que $(u_n)_{n\geq n_0}$ soit une suite monotone.

Pour déterminer le sens de variation d'une suite, il existe essentiellement trois méthodes.

- *Si $u_n = f(n)$, étudier le sens de variations de f*
  Si f est monotone sur un intervalle $[n_0; +\infty[$ alors (u_n) est également monotone et de même sens de variation à partir du rang n_0.

<u>Exemple</u>

Etudier la monotonie de la suite $u_n = \frac{n^2+3}{n+1}$.

Réponse. On a $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$. La dérivée de f est $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$. Le tableau de variation est le suivant, ce qui démontre que (u_n) est croissante pour $n \geq 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	

- *Étudier le signe $u_{n+1} - u_n$*
  En effet, si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0.

Exemple

Étudier la monotonie de la suite $u_n = n^2 - 2n - 3$.

Réponse. Les premiers termes sont $u_0 = -3$, $u_1 = -4$, $u_2 = -3$, $u_3 = 0$ si bien que (u_n) semble croissante à partir du rang 1.
On a $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 2(n+1) - 3 - (n^2 - 2n - 3) = 2n - 1$ qui est positif si $n \geq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire si $n \geq 1$ puisque n est un entier.

Exemple

Étudier la monotonie de la suite $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -u_n^2 + 3u_n - 1 \end{cases}$.

Réponse. Les premiers termes sont $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = -5$, $u_3 = -41$ si bien que (u_n) semble décroissante . On a en effet

$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 + 2u_n - 1 = -(u_n - 1)^2 \leq 0,$$

ce qui prouve la décroissance de (u_n).

- *Si $u_n > 0$, comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.*
  Si pour $n \geq n_0$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ donc (u_n) est croissante à partir du rang n_0.

Exemple

Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{2^n}{n}$.

Réponse. Remarquons que pour tout n, $u_n > 0$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}.$$

Cherchons à quelle conditions ce quotient est supérieur à 1 :

$$\frac{2n}{n+1} \geq 1 \Leftrightarrow 2n \geq n + 1 \Leftrightarrow n \geq 1$$

donc la suite (u_n) est croissante.

❖ Suites arithmétiques

Définition. *Une suite (u_n) est dite <u>arithmétique</u> si chaque terme se déduit du précédent en ajoutant une constante r appelé <u>raison</u> de la suite.*
Une suite arithmétique vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$.

Théorème. Soit n et p deux entiers naturels, alors $u_n = u_p + (n - p)r$.
En particulier $u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

On retiendra ce résultat sous la forme $u_n = u_p + (\text{différence des indices}) \times r$.

Théorème. Soit n et p deux entiers naturels avec $n \leq p$ et (u_n) une suite arithmétique. Alors

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_p = (n - p + 1) \times \frac{u_n + u_p}{2}.$$

On retiendra ce résultat sous la forme

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_p = (\text{nombre de termes de la somme}) \times (\text{moyenne des extrêmes}).$$

Théorème. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \neq 0$.
- Si $r > 0$, la suite (u_n) est croissante ;
- si $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante.

❖ Suites géométriques

Définition. *Une suite (u_n) est dite <u>géométrique</u> si chaque terme se déduit du précédent en multipliant par une constante q appelé <u>raison</u> de la suite.*
Une suite arithmétique vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = qu_n$.

Théorème. Soit n et p deux entiers naturels, alors $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
En particulier $u_n = u_0 \times q^n$.

On retiendra ce résultat sous la forme $u_n = u_p \times q^{\text{différence des indices}}$.

Théorème. Soit n et p deux entiers naturels avec $n \leq p$ et et (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_p = u_n \times \frac{1 - q^{p-n+1}}{1 - q}.$$

Là aussi le résultat pourra se retenir sous la forme

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_p = \text{premier terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes de la somme}}}{1 - q}.$$

Théorème. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $q \geq 0$.

	$q = 0$	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$u_0 > 0$	constante	décroissante	constante	croissante
$u_0 < 0$	constante	croissante	constante	décroissante