Limites et continuité des fonctions

1. Limite en l'infini d'une fonction et asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ et L un réel.

Définition.

1. *Si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand, on dit que <u>la fonction f admet L pour limite en $+\infty$</u> et on note*

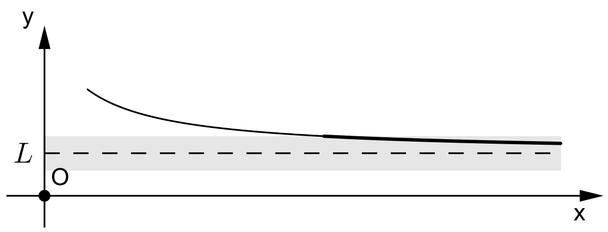
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

2. *Si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand, on dit que <u>la fonction f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$</u> et on note*

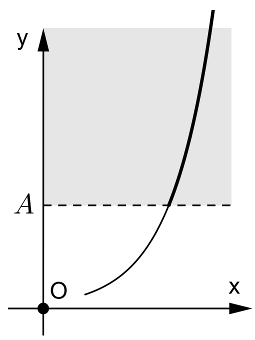
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

3. *Si tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand, on dit que <u>la fonction f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$</u> et on note*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$



Si x est assez grand, toutes les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches de L que l'on veut.



Si x est assez grand, les valeurs de $f(x)$ sont aussi grandes que l'on veut.

Interprétation graphique. Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, la courbe représentant f devient aussi proche que l'on veut de la droite d'équation $y = L$ lorsque x est assez grand.

Définition. *Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$), on dit que la droite d'équation $y = L$ est <u>asymptote horizontale</u> à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

On définit de même les limites en $-\infty$ en remplaçant « dès que x est assez grand » par « dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue ». Ainsi par exemple, on a la définition suivante.

Définition. *Si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue, <u>on dit que la fonction f admet L pour limite en $-\infty$</u> et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.*

<u>Exemple</u>

Montrons que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Prenons un intervalle petit centré en 0, par exemple $]-0{,}1;0{,}1[$. On remarque si $x \in]10;+\infty[$, alors $\frac{1}{x} \in]-0{,}1;0{,}1[$.

Plus généralement, si on prend n'importe quel intervalle contenant 0, de la forme $]-\varepsilon;\varepsilon[$ où ε est un réel strictement positif, alors $x \in \left]\frac{1}{\varepsilon};+\infty\right[\Rightarrow \frac{1}{x} \in]-\varepsilon;\varepsilon[$, ce qui par définition traduit le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Exemple (à connaître)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, où n est un nombre entier strictement positif.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale aux courbes des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ en $+\infty$ et $-\infty$ et en $+\infty$ à la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Exemple

Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-contre.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
variations de f	5 ↘	-1	↗ 2

On y apprend que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et donc que la droite d'équation $y = 5$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et $y = 2$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

2. Limite en un réel d'une fonction et asymptote verticale

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r;a]$ ou $[a;a+r[$, avec r un réel strictement positif.

Définition.

1. *Si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche de a, on dit que <u>la fonction f admet L pour limite en a</u> et on note*
$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$
2. *Si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche de a, on dit que <u>la fonction f admet $+\infty$ pour limite en a</u> et on note*
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$
3. Si *tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche a, on dit que <u>la fonction f admet $-\infty$ pour limite en a</u> et on note*
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

En pratique on est souvent amené à étudier séparément les limites de f pour $x < a$ et pour $x > a$. On parle alors de « limite à gauche en a » et de « limite à droite en a ». On note respectivement $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$.

Exemple

Montrons que $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Soit A un réel positif. Pour $x > 0$, on a $\frac{1}{x} > A \Leftrightarrow x < \frac{1}{A}$.
Donc si $x \in \left]0;\frac{1}{A}\right[$, on a $\frac{1}{x} > A$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Montrons maintenant que $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Soit A un réel négatif. Pour $x < 0$, on a l'équivalence $\frac{1}{x} < A \Leftrightarrow x > \frac{1}{A}$, donc $x \in \left]\frac{1}{A}; 0\right[$ implique $\frac{1}{x} < A$, ainsi $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

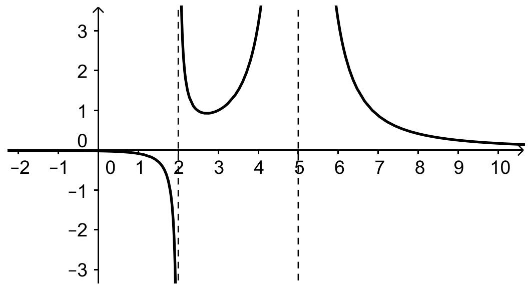
Définition. *Lorsque* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$*, on dit que la droite d'équation* $x = a$ *est* *asymptote verticale* *à la courbe représentative de la fonction* f.

Exemple

On donne la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f ci-contre. On a

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \; ; \; \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

et $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = +\infty$.



Par conséquent les droites d'équations $x = 2$ et $x = 5$ sont asymptotes verticales à $\mathcal{C}_f$.

De plus avec les notions du paragraphe précédent,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Théorèmes sur les limites

❖ **Limites des fonctions usuelles**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$;
  $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.
  Plus généralement,
  - Si $n \geq 1$ est pair, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$;
  - Si $n \geq 1$ est impair, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$;
  $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

❖ **Opérations sur les limites**

Dans ce paragraphe, L et L' sont des réels, et le réel a peut être remplacé par $-\infty$ ou $+\infty$.

➢ Règle sur la somme

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	L'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$	$L + L'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Exemple

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x} + x^2$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, on en déduit par somme que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- Règle sur le produit

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	$L \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} (fg)(x)$	LL'	$+\infty$ si $L > 0$ $-\infty$ si $L < 0$	$-\infty$ si $L > 0$ $+\infty$ si $L > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

- Règle sur le quotient

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	L	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$L' \neq 0$	0 (*)	$\pm\infty$	L'	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{L}{L'}$	$\pm\infty$ (**)	0	$\pm\infty$ (**)		

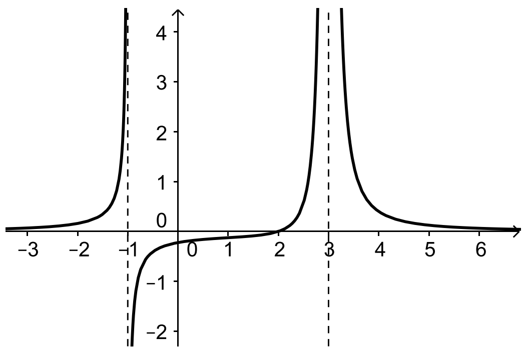
(*) Il faut supposer que g a un signe constant au voisinage de a.
(**) Le signe dépend de celui de $f(x)$ et $g(x)$ lorsque x tend vers a, voir exemple.

Exemple

Soit f la fonction définie sur

$$]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$$

par $(x) = \frac{x-2}{(x+1)(x-3)^2}$.



On a

$$\lim_{x \to -1} (x-2) = -3$$

et

$$\lim_{x \to -1} (x+1)(x-3)^2 = 0,$$

donc $f(x)$ tend vers $-\infty$ ou $+\infty$. Pour le savoir, on étudie le signe du dénominateur.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$(x+1)(x-3)^2$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Par conséquent

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty.$$

De même $\lim\limits_{x \to 3} (x-2) = 1$ donc à l'aide du tableau

$$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty.$$

❖ Limites en l'infini d'un polynôme ou d'un quotient de deux polynômes

Exemple

Considérons la fonction de l'exemple précédent. Pour $x \neq 0$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(x\left(1-\frac{3}{x}\right)\right)^2} = \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)^2} = \frac{1}{x^2} \times \frac{1-\frac{2}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, on obtient par opérations sur les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

❖ **Théorèmes de comparaison**

Théorème. Soit a et L deux réels avec éventuellement $a = -\infty$ ou $a = +\infty$ et f, g, h trois fonctions.
Si pour x proche de a on a
1. $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
2. $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
3. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$. On a $-1 \leq \frac{1}{x}$, donc $\frac{1}{x} - 1 \leq f(x)$. De $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = +\infty$, on en déduit $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

4. Limite d'une fonction composée

Certaines fonctions ne peuvent pas être écrites comme somme, produit ou quotient de fonctions usuelles. Une autre opération sur les fonctions existe, la composition.

Théorème. Soit a, b, c trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g\big(f(x)\big) = c$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + x}$. Déterminons $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$, donc par somme $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + x\right) = +\infty$.
De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par composition de limite, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Exemple

Soit $f(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)^4$, déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$, puis $\lim\limits_{x \to 2} x^4 = 2^4 = 16$, donc par composition de limite, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 16$.

5. Continuité

Définition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I.

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Exemple

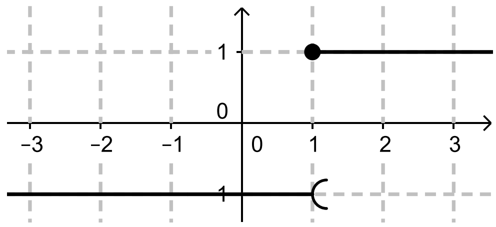
- La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 1 \\ -1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$.
Elle est clairement continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $[1; +\infty[$. En revanche

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -1 = -1 \neq f(1)$$

ce qui montre que f n'est pas continue en 1.



Théorème. Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

6. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (des valeurs intermédiaires). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Alors f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire que pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Exemple A

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une solution sur $]1; +\infty[$.

Réponse. Cette fonction est continue sur D_f car elle y est dérivable et de plus on a $f(2) = \frac{2}{3}$ et $f(3) = \frac{3}{8}$, donc $0{,}5 \in [f(3); f(2)]$. Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel $c \in [2; 3]$ tel que $f(c) = 0{,}5$.

Théorème (extension aux intervalles ouverts). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b[$ (avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$) et admettant une limite finie ou infinie en b. Alors f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$.

Exemple A

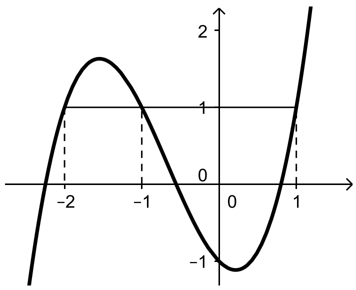
Montrons que l'équation $f(x) = 10^{30}$ admet une solution sur $]1; 2]$.
Il est facile de vérifier que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$. Ainsi $10^{30} \in \left[f(2); \lim_{x \to 1^+} f(x)\right[$, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in]1; 2]$ tel que $f(x) = 10^{30}$.

En rajoutant l'hypothèse de monotonie stricte, on obtient le résultat suivant, le plus utilisé en pratique.

Corollaire. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Alors f prend une et une seule fois toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire que pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel c tel que $f(c) = k$.

Remarque.

1. Si la fonction continue f n'est pas strictement monotone sur $[a; b]$, toute valeur c comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est prise par f, mais pas nécessairement une seule fois.
   Par exemple la fonction ci-contre, continue sur $[-2; 1]$ prend trois fois la valeur 1.
2. Si la fonction n'est pas continue, il se peut que toutes les valeurs comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ ne soient pas prises par f, même si la fonction est strictement monotone.



Convention. On conviendra que dans un tableau de variation, les flèches traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Exemple A

Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée à 0,01 près de chacune d'elle.

Réponse. La fonction f est dérivable, donc continue, sur D_f et $f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$, la fonction f est donc strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 1[$ et $]1; +\infty[$.
Déterminons les limites aux bornes de D_f. Pour $x \in D_f$, on a $f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Pour les limites en -1 et 1, le numérateur tend vers un réel non nul et le dénominateur vers 0. Il faut donc étudier le signe de f.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Par suite $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

L'équation $f(x) = 0{,}5$ n'a pas de solution sur $]-\infty; -1[$ car f est strictement négative sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $]-1; 1[$, f est strictement décroissante et continue, et

$$0{,}5 \in \left]\lim_{x\to1^-} f(x); \lim_{x\to-1^+} f(x)\right[,$$

donc l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution α_1 d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
De même sur $]1; +\infty[$, f est strictement décroissante et continue et

$$0{,}5 \in \left]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to1^+} f(x)\right[,$$

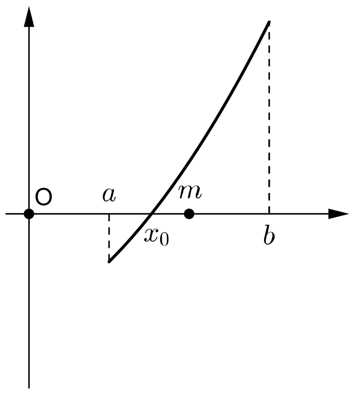
donc l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution α_2 d'après ce même théorème.
Par conséquent l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de la table de la calculatrice on trouve $-0{,}42 < \alpha_1 < -0{,}41$, donc $\alpha_1 \approx -0{,}41$ et de même $2{,}41 < \alpha_2 < 2{,}42$, donc $\alpha_2 \approx 2{,}41$.

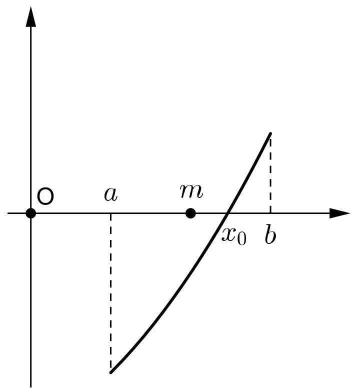
❖ **Algorithme de dichotomie**

On considère une fonction f définie sur un intervalle $[a; b]$. On suppose que f est monotone et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0.
Pour trouver un encadrement à ε près de x_0, on calcule le milieu $m = \frac{a+b}{2}$ de l'intervalle $[a; b]$, puis on réduit l'intervalle de moitié : $[a; m]$ ou $[m; b]$ selon le signe de $f(a)$ et $f(m)$:

- si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signe opposé, c'est-à-dire $f(a)f(m) \leq 0$, alors $x_0 \in [a; m]$;
- si $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe, c'est-à-dire $f(a)f(m) \geq 0$, alors $x_0 \in [m; b]$.



Cas $f(a)f(m) < 0$



Cas $f(a)f(m) \geq 0$

On a donc l'algorithme suivant.

```
Saisir a, b, ε
Tant que b − a > ε faire
  m prend la valeur (a+b)/2
  Si f(a)f(m) < 0 alors
    b prend la valeur m
    Sinon
    a prend la valeur m
  Fin Si
Fin Tant que
Afficher a, b
```

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2$. On sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\sqrt{2}$ comprise entre 1 et 2.
Exécutons l'algorithme précédent avec $a = 1$, $b = 2$ et $\varepsilon = 0{,}04$.

m		1,5	1,25	1,375	1,4375	1,40625
a	1	1	1,25	1,375	1,375	1,40625
b	2	1,5	1,5	1,5	1,4375	1,4375

Cela montre qu'un encadrement inférieur à 0,04 près de $\sqrt{2}$ est $1{,}40625 < \sqrt{2} < 1{,}4375$.
Par conséquent la moyenne 1,42 est une valeur approchée à 0,02 près.