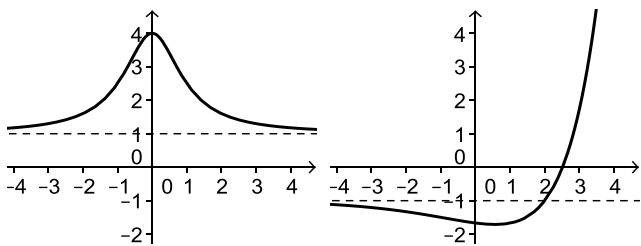


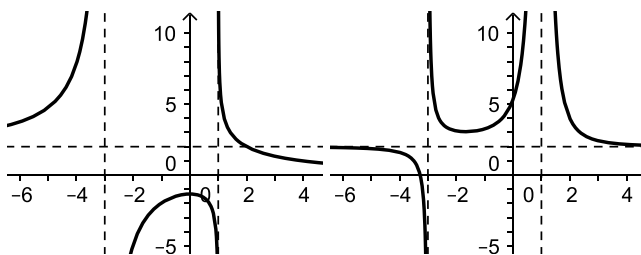
## Limites et continuité des fonctions – Exercices

### Définition des limites et des asymptotes

**1** Indiquer les limites en  $-\infty$  et  $+\infty$  de chacune des fonctions représentées ci-dessous et préciser les asymptotes.



**2** Indiquer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions représentées ci-dessous, préciser les asymptotes et construire le tableau de variations.



**4** Construire la courbe représentative d'une fonction ayant le tableau de variation suivant. Préciser les asymptotes à la courbe représentative de  $f$ .

|     |           |           |           |           |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $0$       | $2$       | $+\infty$ |
| $f$ | $-1$      | $-\infty$ | $+\infty$ | $3$       |

### Calculs de limites

**4** Dans chaque cas, déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ , simplifier  $f(x) + g(x)$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x))$ .

Que remarque-t-on ?

|                |             |             |              |
|----------------|-------------|-------------|--------------|
| Cas n°1        | Cas n°2     | Cas n°3     | Cas n°4      |
| $f(x) = x$     | $f(x) = x$  | $f(x) = 2x$ | $f(x) = x$   |
| $g(x) = 3 - x$ | $g(x) = -x$ | $g(x) = -x$ | $g(x) = -2x$ |

**5** Même exercice avec  $f(x) \times g(x)$ .

|                      |                        |                      |                       |
|----------------------|------------------------|----------------------|-----------------------|
| Cas n°1              | Cas n°2                | Cas n°3              | Cas n°4               |
| $f(x) = x$           | $f(x) = x$             | $f(x) = x^2$         | $f(x) = x^2$          |
| $g(x) = \frac{1}{x}$ | $g(x) = \frac{1}{x^2}$ | $g(x) = \frac{1}{x}$ | $g(x) = -\frac{1}{x}$ |

**6** Déterminer les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  des fonctions suivantes.

- |                             |                                     |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| a. $f_1(x) = 2 + x$         | b. $f_2(x) = 5 - 2x$                |
| c. $f_3(x) = 3x^2$          | d. $f_4(x) = \frac{5x^2}{3}$        |
| e. $f_5(x) = 5x^3$          | f. $f_6(x) = -x^3$                  |
| g. $f_7(x) = \frac{5}{x}$   | h. $f_8(x) = -\frac{3}{4x}$         |
| i. $f_9(x) = \frac{5}{x+3}$ | j. $f_{10}(x) = 2 - \frac{1}{5-3x}$ |

**7** Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes définies sur  $] -\infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$ .

- |                             |                            |
|-----------------------------|----------------------------|
| a. $f(x) = \frac{1}{x}$     | b. $g(x) = -\frac{2}{x^2}$ |
| c. $h(x) = x - \frac{3}{x}$ | d. $j(x) = \frac{5-x}{4x}$ |

**8** Déterminer les limites en 2 des fonctions suivantes définies sur  $] -\infty; 2[ \cup ] 2; +\infty[$  par

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a. $f(x) = \frac{1}{2-x}$     | b. $g(x) = -\frac{5}{2-x}$    |
| c. $h(x) = 3 - \frac{2}{2-x}$ | d. $j(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ |

**9** Déterminer les limites en  $-\infty$  et  $+\infty$  des fonctions suivantes.

- |                                    |                                  |
|------------------------------------|----------------------------------|
| a. $f(x) = 3x^2 - 5x$              | b. $g(x) = x - x^2$              |
| c. $h(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{x}$ | d. $j(x) = \frac{x^2-2}{x-1}$    |
| e. $k(x) = \frac{5-x}{x^2+1}$      | f. $m(x) = \frac{2x^2-3}{x^2-1}$ |

**10** Pour chacune des fonctions suivantes,

1. Déterminer la limite en 1. On devra distinguer  $1^-$  et  $1^+$  dans certains cas.
  2. Déterminer les limites en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
  3. Donner les asymptotes à la courbe représentative.
- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| a. $f(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$                | b. $g(x) = x - 4 + \frac{3}{2(x-1)}$ |
| c. $h(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$ | d. $j(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$      |

**11** Pour chacune des fonctions suivantes,

1. Déterminer l'ensemble de définition.
  2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
  3. Donner les asymptotes à la courbe représentative.
- |                               |                                 |
|-------------------------------|---------------------------------|
| a. $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$  | b. $g(x) = \frac{x^2}{x^2+x+1}$ |
| c. $h(x) = \frac{x}{(x+4)^2}$ | d. $j(x) = \frac{5-x}{x^2-x-6}$ |

**12** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x-2}{(x+1)^2(x-3)}$

1. Donner l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de l'ensemble de définition et donner les asymptotes à la courbe de  $f$ .

### Théorèmes de comparaison

**13** Soit  $f$  une fonction vérifiant  $x^2 \leq f(x)$  pour tout  $x > 8$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**14** Soit  $f$  une fonction définie sur  $] 0; +\infty[$  telle que  $\frac{1}{x} \leq f(x)$  pour  $x > 0$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**15** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que pour  $x \in ] 0; 1[$  on a  $\frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**16** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{4+\sin x}$ .

### Limites d'une fonction composée

**17** Déterminer les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  des fonctions suivantes.

- |                         |                                    |
|-------------------------|------------------------------------|
| a. $f(x) = x^2 + 2$     | b. $g(x) = \frac{1}{x^2+2}$        |
| c. $h(x) = (x^2 + 2)^3$ | d. $j(x) = \sqrt{\frac{5}{x^2+2}}$ |

**18** Déterminer les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  des fonctions suivantes.

- |   |   |
|---|---|
| a. $f(x) = \sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+7}}$ | b. $g(x) = \left(\frac{3x^2+1}{x^2+7}\right)^3$ |
|---|---|

**Problèmes**

**19** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]2; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{\frac{7}{x-2}}$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ .

**Étude de fonctions**

**20** Soit  $f$  la fonction définie sur  $] - \infty; 3[ \cup ] 3; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{-2x+1}{x-3}$  et  $C_f$  sa courbe.

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Donner l'équation de l'asymptote horizontale ( $d$ ) et de l'asymptote verticale ( $d'$ ).
4. Étudier la position relative de  $C_f$  et ( $d$ ).

**21** Soit  $f$  la fonction définie sur  $] - \infty; 4[ \cup ] 4; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^2-7x+14}{x-4}$  et  $C_f$  sa courbe.

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Soit  $D$  la droite d'équation  $y = x - 3$ .
  - a. Simplifier  $f(x) - (x - 3)$ .
  - b. En déduire la position relative de  $D$  et  $C_f$ .
  - c. Calculer la limite de  $f(x) - (x - 3)$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ . Qu'en déduit-on pour  $D$  et  $C_f$  ?

**Continuité, théorème des valeurs intermédiaires**

**22** Tracer la courbe de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x^3 - 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et montrer qu'elle est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**23** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 - 4.$$

On cherche à déterminer le nombre de solution de l'équation  $f(x) = 0$ .

1. Construire le tableau de variations de  $f$ .
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$
3. Conclure à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

**24** Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$  et trouver à l'aide de la calculatrice un encadrement à  $10^{-2}$  puis une valeur approchée à  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .

a.  $f(x) = x^3 + 5x - 7$       b.  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$

**25** Montrer que l'équation  $x^4 - x^3 = 2$  admet deux solutions réelles et en déterminer un encadrement à 0,01 près.

**26** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^3 - x + 1.$$

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
2. Construire le tableau de variation de  $f$ .
3. Montrer que  $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{2}{9}\sqrt{3}$ .
4. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$  et donner une valeur approchée à 0,01 près.

**27** Soit  $a$  un réel et  $n$  un entier naturel impair. Montrer que l'équation  $x^n = a$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ . Que se passe-t-il si  $n$  est pair ?

**28**  $f$  est la fonction définie sur  $D_f = ] - \infty; 3[ \cup ] 3; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{ax+b}{x-3}$  où  $a$  et  $b$  sont réels.

On sait que la droite d'équation  $y = 4$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ . De plus  $f'(1) = \frac{1}{2}$ .

1. Trouver les valeurs de  $a$  et  $b$ .
2. Étudier les limites aux bornes de  $D_f$ .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$ .

**29** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{4x+3}{x^2+1}$ .

1. Montrer que  $f'(x) = \frac{-4x^2-6x+4}{(x^2+1)^2}$  puis construire le tableau de variation de  $f$ .
2. a. Donner en fonction de  $k \in \mathbb{R}$  le nombre de solution de l'équation  $f(x) = k$ .  
b. Retrouver ce résultat en montrant que si  $k \neq 0$ , l'équation  $f(x) = k$  équivaut à une équation du second degré de discriminant  $-4(k-4)(k+1)$ .

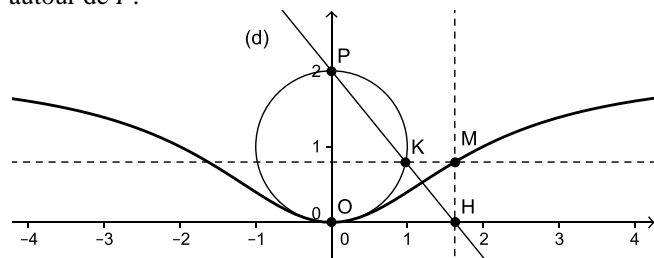
**30** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{3x+1}{x^3-3x+3}$ .

1. Montrer que l'équation  $x^3 - 3x + 3 = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ , en donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près et en déduire l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Montrer que  $f'(x) = -\frac{3(2x^3+x^2-4)}{(x^3-3x+3)^2}$ . Montrer que l'équation  $2x^3 + x^2 - 4 = 0$  admet une seule solution  $\beta$  sur  $\mathbb{R}$ , en donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près puis en déduire le signe de  $f'$  et les variations de  $f$ .
3. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que les asymptotes à la courbe de  $f$ .

**31** Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan, on considère  $P(0; 2)$  et  $\mathcal{C}$  le cercle de diamètre  $[OP]$ . Soit une droite  $(d)$  passant par  $P$ . On appelle  $K$ , lorsqu'il existe, le second point d'intersection de  $(d)$  avec  $\mathcal{C}$  et  $H$  l'intersection de  $(d)$  avec l'axe des abscisses.

La parallèle à  $(O; \vec{i})$  passant par  $K$  coupe la parallèle à  $(O; \vec{j})$  passant par  $H$  en  $M$ .

On s'intéresse au lieu  $\mathcal{E}$  des points  $M$  lorsque  $(d)$  pivote autour de  $P$ .



1. Déterminer le point  $M$  si  $(d) = (OP)$ .
2. On suppose à présent  $(d) \neq (OP)$  et soit  $m$  le coefficient directeur de  $(d)$ .
  - a. Démontrer que  $(d)$  a pour équation  $y = mx + 2$  et  $\mathcal{C}$  a pour équation  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ .
  - b. En déduire que  $(d)$  recoupe le cercle si et seulement si  $m \neq 0$  et qu'alors  $M\left(-\frac{2}{m}; \frac{2}{m^2+1}\right)$ .
3. Démontrer grâce aux questions 1 et 2 :
 
$$M(x; y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow y = \frac{2x^2}{x^2+4}.$$

4. Étudier les variations de la fonction  $f: x \mapsto \frac{2x^2}{x^2+4}$  ainsi que ses limites. Tracer la courbe et préciser ses asymptotes.