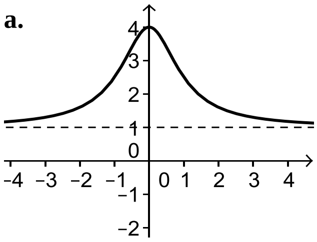
Limites et continuité des fonctions – Exercices

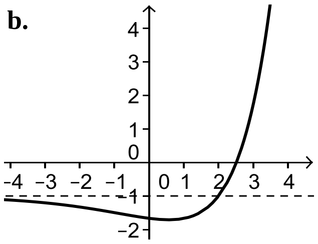
Définition des limites et des asymptotes

1 Indiquer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de chacune des fonctions représentées ci-dessous et préciser les asymptotes.

a.

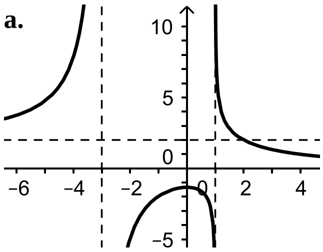


b.

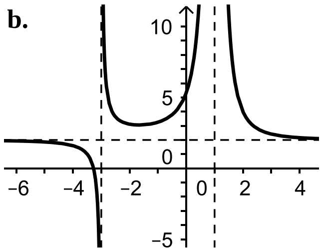


2 Indiquer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions représentées ci-dessous, préciser les asymptotes et construire le tableau de variations.

a.



b.



3 Construire la courbe représentative d'une fonction ayant le tableau de variation suivant. Préciser les asymptotes à la courbe représentative de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

Calculs de limites

4 Dans chaque cas, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, simplifier $f(x)+g(x)$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)+g(x)\big)$. Que remarque-t-on ?

Cas n°1	Cas n°2	Cas n°3	Cas n°4
$f(x)=x$	$f(x)=x$	$f(x)=2x$	$f(x)=x$
$g(x)=3-x$	$g(x)=-x$	$g(x)=-x$	$g(x)=-2x$

5 Même exercice avec $f(x)\times g(x)$.

Cas n°1	Cas n°2	Cas n°3	Cas n°4
$f(x)=x$	$f(x)=x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=x^2$
$g(x)=\frac{1}{x}$	$g(x)=\frac{1}{x^2}$	$g(x)=\frac{1}{x}$	$g(x)=-\frac{1}{x}$

6 Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f_1(x)=2+x$ **b.** $f_2(x)=5-2x$
c. $f_3(x)=3x^2$ **d.** $f_4(x)=\frac{5x^2}{3}$
e. $f_5(x)=5x^3$ **f.** $f_6(x)=-x^3$
g. $f_7(x)=\frac{5}{x}$ **h.** $f_8(x)=-\frac{3}{4x}$
i. $f_9(x)=\frac{5}{x+3}$ **j.** $f_{10}(x)=2-\frac{1}{5-3x}$

7 Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes définies sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

a. $f(x)=\frac{1}{x}$ **b.** $g(x)=-\frac{2}{x^2}$
c. $h(x)=x-\frac{3}{x}$ **d.** $j(x)=\frac{5-x}{4x}$

8 Déterminer les limites en 2 des fonctions suivantes définies sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par

a. $f(x)=\frac{1}{2-x}$ **b.** $g(x)=-\frac{5}{2-x}$
c. $h(x)=3-\frac{2}{2-x}$ **d.** $j(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$

9 Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x)=3x^2-5x$ **b.** $g(x)=x-x^2$
c. $h(x)=x^3-2x+\frac{1}{x}$ **d.** $j(x)=\frac{x^2-2}{x-1}$
e. $k(x)=\frac{5-x}{x^2+1}$ **f.** $m(x)=\frac{2x^2-3}{x^2-1}$

10 Pour chacune des fonctions suivantes,

1. Déterminer la limite en 1. On devra distinguer 1^- et 1^+ dans certains cas.
2. Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Donner les asymptotes à la courbe représentative.

a. $f(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$ **b.** $g(x)=x-4+\frac{3}{2(x-1)}$
c. $h(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$ **d.** $j(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$

11 Pour chacune des fonctions suivantes,

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Donner les asymptotes à la courbe représentative.

a. $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ **b.** $g(x)=\frac{x^2}{x^2+x+1}$
c. $h(x)=\frac{x}{(x+4)^2}$ **d.** $j(x)=\frac{5-x}{x^2-x-6}$

12 Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x-2}{(x+1)^2(x-3)}$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition et donner les asymptotes à la courbe de f.

Théorèmes de comparaison

13 Soit f une fonction vérifiant $x^2\leq f(x)$ pour tout $x>8$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

14 Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que $\frac{1}{x}\leq f(x)$ pour $x\in]0;1]$. Déterminer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

15 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour $x\in]0;1]$ on a $\frac{1}{x+1}\leq f(x)\leq\frac{1}{x^2+1}$. Calculer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

16 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{4+\sin x}$.

Limites d'une fonction composée

17 Déterminer les limites en $-\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x)=x^4+2$ **b.** $g(x)=\cos\left(\frac{1}{x^4+2}\right)$
c. $h(x)=(x^4+2)^3$ **d.** $j(x)=\sqrt{\frac{5}{x^4+2}}$

18 Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x)=\sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+7}}$ **b.** $g(x)=\left(\frac{3x^2+1}{x^2+7}\right)^3$

19 On considère la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{7}{x-2}}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

Étude de fonctions

20 Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ par $f(x)=\frac{-2x+1}{x-3}$ et C_f sa courbe.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Donner l'équation de l'asymptote horizontale (d) et de l'asymptote verticale (d').
4. Étudier la position relative de C_f et (d).

21 Soit f la fonction définie sur $]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2-7x+14}{x-4}$ et C_f sa courbe.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Soit D la droite d'équation $y=x-3$.
   - **a.** Simplifier $f(x)-(x-3)$.
   - **b.** En déduire la position relative de D et C_f.
   - **c.** Calculer la limite de $f(x)-(x-3)$ en $-\infty$ et $+\infty$. Qu'en déduit-on pour D et C_f ?

Continuité, théorème des valeurs intermédiaires

22 Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 \text{ si } x<-1 \\ x^3-2 \text{ si } -1\leq x\leq 1 \\ -1 \text{ si } x>1 \end{cases}$$

et montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

23 Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2-4.$$

On cherche à déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x)=0$.

1. Construire le tableau de variations de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$
3. Conclure à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

24 Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et trouver à l'aide de la calculatrice un encadrement à 10^{-2} puis une valeur approchée à 10^{-2} de α.

a. $f(x)=x^3+5x-7$ **b.** $f(x)=3x^3-2x^2+x+1$

25 Montrer que l'équation $x^4-x^3=2$ admet deux solutions réelles et en déterminer un encadrement à 0,01 près.

26 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x^3-x+1.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Construire le tableau de variation de f.
3. Montrer que $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=1-\frac{2}{9}\sqrt{3}$.
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α sur $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée à 0,01 près.

27 Soit a un réel et n un entier naturel impair. Montrer que l'équation $x^n=a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Que se passe-t-il si n est pair ?

Problèmes

28 f est la fonction définie sur $D_f=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ par $f(x)=\frac{ax+b}{x-3}$ où a et b sont réels.
On sait que la droite d'équation $y=4$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$. De plus $f'(1)=\frac{1}{2}$.

1. Trouver les valeurs de a et b.
2. Étudier les limites aux bornes de D_f.
3. Dresser le tableau de variations de f.

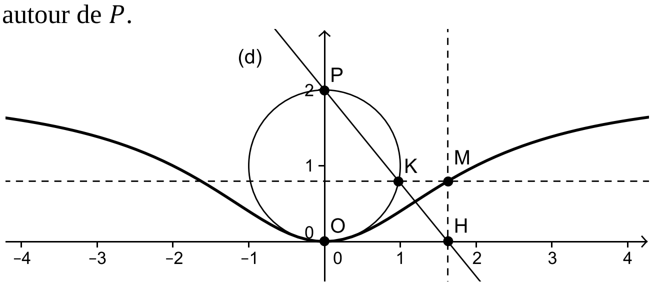
29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{4x+3}{x^2+1}$.

1. Montrer que $f'(x)=\frac{-4x^2-6x+4}{(x^2+1)^2}$ puis construire le tableau de variation de f.
2. **a.** Donner en fonction de $k\in\mathbb{R}$ le nombre de solution de l'équation $f(x)=k$.
   b. Retrouver ce résultat en montrant que si $k\neq 0$, l'équation $f(x)=k$ équivaut à une équation du second degré de discriminant $-4(k-4)(k+1)$.

30 Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{3x+1}{x^3-3x+3}$.

1. Montrer que l'équation $x^3-3x+3=0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$, en donner une valeur approchée à 10^{-1} près et en déduire l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que $f'(x)=-\frac{3(2x^3+x^2-4)}{(x^3-3x+3)^2}$. Montrer que l'équation $2x^3+x^2-4=0$ admet une seule solution β sur $\mathbb{R}$, en donner une valeur approchée à 10^{-1} près puis en déduire le signe de f' et les variations de f.
3. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que les asymptotes à la courbe de f.

31 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère $P(0;2)$ et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[OP]$. Soit une droite (d) passant par P. On appelle K, lorsqu'il existe, le second point d'intersection de (d) avec $\mathcal{C}$ et H l'intersection de (d) avec l'axe des abscisses.
La parallèle à $(O;\vec{\imath})$ passant par K coupe la parallèle à $(O;\vec{\jmath})$ passant par H en M.
On s'intéresse au lieu $\mathcal{E}$ des points M lorsque (d) pivote autour de P.



1. Déterminer le point M si $(d)=(OP)$.
2. On suppose à présent $(d)\neq(OP)$ et soit m le coefficient directeur de (d).
   a. Démontrer que (d) a pour équation $y=mx+2$ et $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2+(y-1)^2=1$.
   b. En déduire que (d) recoupe le cercle si et seulement si $m\neq 0$ et qu'alors $M\left(-\frac{2}{m};\frac{2}{m^2+1}\right)$.
3. Démontrer grâce aux questions 1 et 2 :
$$M(x;y)\in\mathcal{E}\Leftrightarrow y=\frac{2x^2}{x^2+4}.$$
4. Étudier les variations de la fonction $f\colon x\mapsto\frac{2x^2}{x^2+4}$ ainsi que ses limites. Tracer la courbe et préciser ses asymptotes.