# Probabilités conditionnelles

Dans ce chapitre, on note $E$ l'univers d'une expérience aléatoire, c'est-à-dire l'ensemble de ses issues, et $P$ une (loi de) probabilité sur cet univers.

## 1. Probabilité conditionnelle

**Exemple**

Un sachet de 100 bonbons contient 40 bonbons acidulés, les autres bonbons sont à la guimauve ; 10 bonbons sont acidulés et au parfum orange et 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange. Les bonbons qui ne sont pas au parfum orange sont à la fraise.
On choisit un bonbon au hasard dans ce sachet. On note :

- $A$ l'événement « le bonbon est acidulé » ;
- $G$ l'événement « le bonbon est à la guimauve » ;
- $O$ l'événement « le bonbon est au parfum orange » ;
- $F$ l'événement « le bonbon est au parfum fraise » ;

1. Compléter le tableau de probabilité à double entrée ci-contre résumant les données.

| | $A$ | $G$ | Total |
|---|---|---|---|
| $O$ | **0,1** | **0,18** | 0,28 |
| $F$ | 0,3 | 0,42 | 0,72 |
| Total | **0,4** | 0,6 | 1 |

2. On a $P(A) = 0{,}4$ et $P(O \cap A) = 0{,}1$
On choisit un bonbon acidulé. Quelle est la probabilité qu'il soit à l'orange ? $\frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$.
On appelle cette probabilité « probabilité conditionnelle de $O$ sachant $A$ » et on la note $P_A(O)$. Quelle relation existe-t-il entre $P_A(O)$, $P(A)$ et $P(O \cap A)$ ?

$$P_A(O) = \frac{P(O \cap A)}{P(A)}.$$

**Définition.** *Soit $A$ et $B$ deux événements avec $P(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$ est le nombre noté $P_A(B)$ défini par $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$. On lit « probabilité de $B$ sachant $A$ ».*

On définit ainsi une nouvelle loi de probabilité qui à ce titre a toutes les propriétés d'une loi de probabilités. En particulier, on a $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

**Remarque.** $A \mapsto P_A(B)$ n'est pas une probabilité, donc $P_A(B) + P_{\bar{A}}(B) \neq 1$.

**Théorème (probabilité de l'intersection).** Soit $A$ et $B$ deux événements. Alors

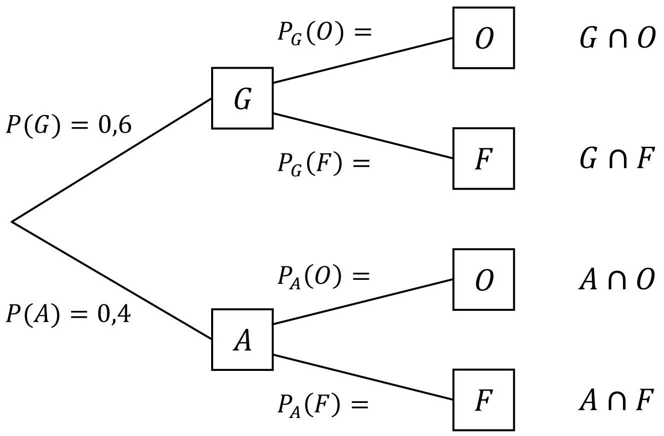
- si $P(A) \neq 0$, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ ;
- si $P(B) \neq 0$, on a $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

Cette formule permet de calculer $P(A \cap B)$ connaissant l'une des probabilités conditionnelles $P_A(B)$ ou $P_B(A)$ .

## 2. Arbres pondérés et probabilités totales

Il peut s'avérer utile de traduire une situation ou de modéliser une expérience aléatoire par un arbre. La construction de cet arbre est parfois plus pratique qu'un tableau. Reprenons l'exemple précédent.

1er niveau 2ème niveau Événement




Le premier niveau de l'arbre précise les deux types possibles (acidulé ou guimauve) du bonbon choisi au hasard dans le sachet. On indique sur les branches du premier niveau les probabilités $P(G)$ et $P(A)$.

Le deuxième niveau indique les parfums possibles sachant le type du bonbon. Ce deuxième niveau est composé de deux branches issues du nœud $G$ et de deux branches issues du nœud $A$. On indique sur les branches de ce deuxième niveau les probabilités que le bonbon soit au parfum orange (événement $O$) ou au parfum fraise (événement $F$) sachant qu'il est à la guimauve ou acidulé. Ce sont les probabilités conditionnelles de l'événement $F$ ou $O$ sachant l'événement $G$ ou $A$.

Chaque succession de branches est appelée chemin, il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin. Cet arbre a quatre chemins correspondant aux événements $G \cap O$, $G \cap F$, $A \cap O$ et $A \cap F$.

Généralement les données dont on dispose ne permettent pas d'indiquer immédiatement les probabilités des branches ou des chemins. On a alors recourt aux règles suivantes qui découlent de la définition d'une probabilité conditionnelle et des propriétés des probabilités.

**Règles des arbres pondérés**

- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités indiquées sur les branches du chemin.
- La somme des probabilités indiquées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.

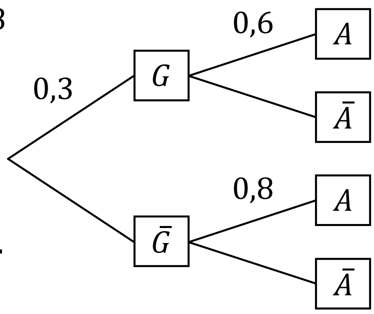
**Exemple**

Pour l'inscription à un concours, les candidats ont dû choisir une langue : anglais ou espagnol.
30 % des candidats sont des garçons et 60 % d'entre eux ont choisi l'anglais. Parmi les femmes, 80 % ont choisi l'anglais.
On choisit un candidat au hasard. On considère les événements

- $G$ : « le candidat choisi est un garçon » ;
- $A$ : « le candidat choisi a opté pour l'anglais ».

**1.** Traduire l'énoncé à l'aide des événements $G$ et $A$.
**2.** Représenter la situation par un arbre et indiquer les probabilités de l'énoncé.
**3.** Répondre aux questions suivantes en indiquant la règle utilisée.
  **a.** Calculer $P(G \cap A)$ et $P(\bar{G} \cap A)$
  **b.** Calculer $P_G(\bar{A})$ et $P_{\bar{G}}(\bar{A})$.
  **c.** Calculer la probabilité que le candidat ait pris l'anglais.
  **d.** Calculer la probabilité qu'un candidat ayant pris l'anglais soit un garçon.

**Réponse.**
**1.** D'après l'énoncé $P(G) = 0{,}3$, $P_G(A) = 0{,}6$ et $P_{\bar{G}}(A) = 0{,}8$
**2.** Voir ci-contre.




**3.** On calcule les probabilités suivantes.
  **a.** D'après la règle **a.**, on a

$$P(G \cap A) = P_G(A) \times P(G) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$$

et

$$P(\bar{G} \cap A) = P_{\bar{G}}(A) \times P(\bar{G}) = 0{,}8 \times (1 - 0{,}3) = 0{,}56.$$

  **b.** D'après la règle **b.**, $P_G(\bar{A}) + P_G(A) = 1$, d'où

$$P_G(\bar{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

On a de même $P_{\bar{G}}(\bar{A}) = 1 - P_{\bar{G}}(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
  **c.** D'après la règle **c.**,

$$P(A) = P(G \cap A) + P(\bar{G} \cap A) = 0{,}18 + 0{,}56 = 0{,}74.$$

  **d.** On a $P_A(G) = \frac{P(A \cap G)}{P(A)} = \frac{0{,}18}{0{,}74} = \frac{9}{37}$.

La dernière des règles des arbres pondérés est connue sous le nom de « formule des probabilités totales ».

**Théorème (formule des probabilités totales).** Soit un événement $A$ réunion des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ deux à deux incompatibles. Pour tout événement $B$ on a

$$P(A \cap B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n),$$

ou encore

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

si les événements $A_i$ ont une probabilité non nulle.

## 3. Événements indépendants

Soit $A$ et $B$ deux événements de probabilité non nulle.
On dit que l'événement $A$ est indépendant de l'événement $B$ si la réalisation de l'événement $B$ ne modifie pas la probabilité de $A$, c'est-à-dire si $P_B(A) = P(A)$.
Nous noterons $A$ est indépendant de $B$ par $A \coprod B$ (cette notation n'est pas standard mais elle pratique pour les démonstrations qui suivent ; à ne pas utilisant le jour du baccalauréat !).
On a

$$\begin{aligned} A \coprod B &\Leftrightarrow P_B(A) = P(A) \\ &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \\ &\Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \\ &\Leftrightarrow B \coprod A \end{aligned}$$

Ainsi l'événement $A$ est indépendant de $B$ si et seulement si l'événement $B$ est indépendant de $A$. On dira plus simplement que les événements $A$ et $B$ sont indépendants.

**Définition.** *Deux événements $A$ et $B$ de probabilité non nulle sont dits* <u>*indépendants*</u> *si l'une des trois égalités suivantes est vérifiée*

$$P_A(B) = P(B)\ ;\ P_B(A) = P(A) \text{ ou } P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

**Théorème.** Si deux événements $X$ et $Y$ sont indépendants, il en est de même des événements $X$ et $\bar{Y}$.

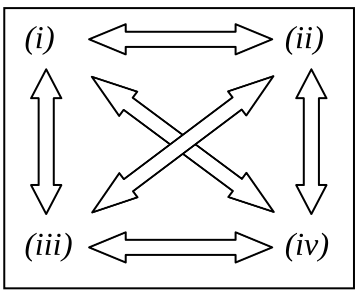
**Démonstration (exigible).** On a $P(X \cap \bar{Y}) = P(X)P_X(\bar{Y}) = P(X) \times \left(1 - P_X(Y)\right)$. Puisque $X$ et $Y$ sont indépendants, $P_X(Y) = P(Y)$, d'où l'on déduit que

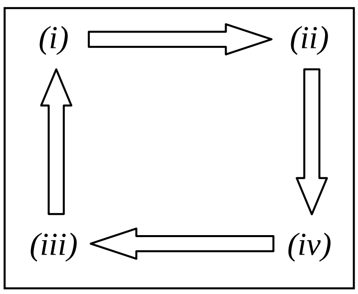
$$P(X \cap \bar{Y}) = P(X)\left(1 - P(Y)\right) = P(X)P(\bar{Y}).$$

Cela montre que $X$ et $\bar{Y}$ sont indépendants. ■

**Corollaire.** Soit $A$ et $B$ deux événements. Les propositions suivantes sont équivalentes deux à deux.
*(i)* $A$ et $B$ sont indépendants ;
*(ii)* $A$ et $\bar{B}$ sont indépendants ;
*(iii)* $\bar{A}$ et $B$ sont indépendants ;
*(iv)* $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

**Démonstration.** A priori il y a 6 équivalences à prouver, soit 12 implications comme le schéma de gauche permet de s'en rendre compte.
En fait il est suffisant de prouver les 4 implications du schéma de droite ; il est aisé de voir qu'on peut ainsi aller d'une des quatre propositions à une autre en suivant le sens des flèches.



Pour prouver cette chaîne d'implications, on va utiliser plusieurs fois le théorème, ainsi que la symétrie de la propriété « être indépendant ».

$$
\begin{array}{rll}
\textit{(i)}\ \ A\coprod B & \Rightarrow & A\coprod\bar{B}\ \textit{(ii)}\ \ \text{(théorème)} \\
 & \Rightarrow & \bar{B}\coprod A\ \text{(symétrie)} \\
 & \Rightarrow & \bar{B}\coprod\bar{A}\ \text{(théorème)} \\
 & \Rightarrow & \bar{A}\coprod\bar{B}\ \textit{(iv)}\ \ \text{(symétrie)} \\
 & \Rightarrow & \bar{A}\coprod\bar{\bar{B}}\ \text{(théorème)} \\
 & \Rightarrow & \bar{A}\coprod B\ \textit{(iii)}\ \ (\text{car } \bar{\bar{B}} = B) \\
 & \Rightarrow & B\coprod\bar{A}\ \text{(symétrie)} \\
 & \Rightarrow & B\coprod\bar{\bar{A}}\ \text{(théorème)} \\
 & \Rightarrow & B\coprod A\ (\text{car } \bar{\bar{A}} = A) \\
 & \Rightarrow & A\coprod B\ \textit{(i)}
\end{array}
$$

On a bien prouvé *(i)* ⇒ *(ii)* ⇒ *(iv)* ⇒ *(iii)* ⇒ *(i)*. ■

## 4. Formulaire

Soient $A$ et $B$ deux événements.

Formules pour l'intersection

- $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P\text{\_}B(A)$ si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ si $A$ et $B$ sont indépendants.

Formules pour la réunion

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A$ et $B$ sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$).