Probabilités conditionnelles – Exercices

Probabilités conditionnelles

1 On choisit un jour de l'année. On considère les événements :

- R : « le jour choisi a été pluvieux » ;
- V : « le jour choisi a été venté »

Pour chacune des informations suivantes, indiquer si elle correspond ou non à une probabilité conditionnelle.

1. Dans l'année, 40 % des jours sont pluvieux.
2. 66 % des jours pluvieux sont ventés.
3. Parmi les jours non ventés, 22 % sont pluvieux.
4. 49 % des jours dans l'année n'ont été ni ventés ni pluvieux.

2 A et B sont des événements tels que $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup B) = 0{,}8$. Déterminer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

3 Dans une usine, deux machines produisent le même type de pièces. On choisit une pièce au hasard parmi les pièces produites dans l'usine et on considère les événements

- A : « la pièce choisie provient de la $1^{\text{ère}}$ machine » ;
- B : « la pièce choisie provient de la 2^{nde} machine » ;
- D : « la pièce choisie est défectueuse ».

On sait que $P(A) = 0{,}55$, $P_A(D) = 0{,}01$ et $P_B(D) = 0{,}02$.

1. Exprimer par une phrase la signification de ces probabilités.
2. Préciser la valeur de $P(B)$.
3. Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$. Exprimer par une phrase la signification de ces probabilités.

4 Trois machines A, B, C produisent respectivement 60 %, 30 % et 10 % du nombre total de boulons fabriqués dans une entreprise. Le pourcentages de boulons défectueux et provenant des machines A, B, C sont respectivement 2 %, 3 % et 4 %. On choisit au hasard un boulon dans la production de la journée.

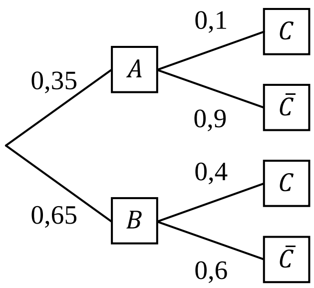
1. Compléter le tableau ci-contre.

Machine / Boulon	A	B	C	Total
Défectueux				
Non défectueux				
Total				

2. Quelle est la probabilité que le boulon soit défectueux ?
3. Sachant que le boulon choisi est défectueux, quelle est la probabilité que ce boulon ait été produit par la machine C ?

Arbres pondérés

5 L'arbre ci-contre représente une situation de probabilités.



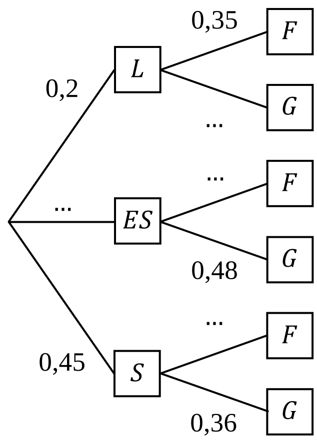
1. Indiquer la signification des nombres 0,65 ; 0,1 et 0,6.
2. Lire la valeur des probabilités $P(A)$, $P_B(C)$ et $P_A(\bar{C})$.

6 Un site de vente par correspondance propose 2400 jeux vidéos dont 1296 sont des jeux pour console, le reste étant des jeux pour ordinateur.
Un tiers des jeux pour console sont des jeux d'action et 25 % des jeux pour ordinateur sont des jeux d'action. On choisir au hasard un jeu proposé par le site. On définit les événements

- C : « le jeu est pour console » ;
- O : « le jeu est pour ordinateur » ;
- A : « le jeu est un jeu d'action ».

1. En utilisant les informations de l'énoncé, déterminer la valeur de $P(C)$, $P(O)$, $P_O(A)$ et $P_C(A)$.
2. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré et placer sur cet arbre chacune des probabilités déterminées à la question 1.
3. Calculer $P_O(\bar{A})$ et $P_C(\bar{A})$ et compléter l'arbre pondéré.

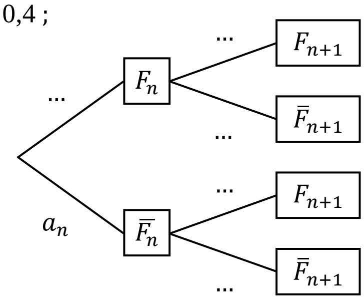
7 Un groupe de lycéens est formé d'élèves de L, ES ou S. Ces élèves sont des filles (F) ou des garçons (G). Un élève est choisi au hasard dans le groupe.
L'arbre pondéré ci-contre représente cette situation.



1. Préciser la valeur de $P(L)$ et $P_L(F)$. À quoi correspondent ces probabilités ?
2. Compléter cet arbre avec les probabilités manquantes et donner, pour chacune de ces probabilités, la notation correspondante.
3. Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille de ES ?
4. En utilisant les questions précédentes, compléter le tableau de probabilités suivant.

	L	ES	S	Total
Filles				
Garçons				
Total				1

8 Pierre a décidé d'arrêter de fumer. On admet que
- s'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,4 ;
- s'il fume un jour, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,9.



Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements

- F_n : « Pierre fume le $n^{\text{ième}}$ jour » ;
- $\bar{F}_n$: « Pierre ne fume pas le $n^{\text{ième}}$ jour ».

On note $a_n = P(\bar{F}_n)$ la probabilité que Pierre ne fume pas le $n^{\text{ième}}$ jour . Aujourd'hui Pierre ne fume pas, donc $a_1 = 1$.

1. **a.** Justifier que $P(F_n) = 1 - a_n$.
   b. Compléter l'arbre ci-dessus.
   c. Montrer que $a_{n+1} = -0{,}5a_n + 0{,}9$.
2. On pose $u_n = a_n - 0{,}6$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_1.

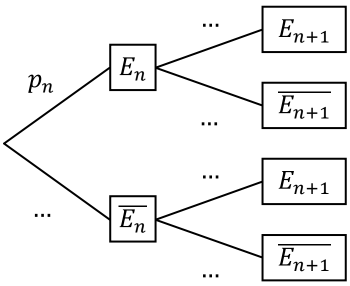
b. Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que pour tout $n \geq 1$, on a
$$a_n = 0{,}4(-0{,}5)^{n-1} + 0{,}6.$$
c. Déterminer la limite de (a_n) et interpréter.
d. Justifier que pour tout réel $e > 0$, il existe n_0 tel que
$$n \geq n_0 \Rightarrow 0{,}6 - e < a_n < 0{,}6 + e \quad (*).$$
Écrire un algorithme demandant un réel $e > 0$ et retournant le plus petit entier n_0 vérifiant $(*)$.

9 *(2013, Pondichéry).* Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n. On a ainsi : $p_1 = 0$.

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.



2. **a.** Compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessus.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}04$.
   c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.
   d. En déduire la limite de la suite (p_n).
   e. On admet dans cette question[1] que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

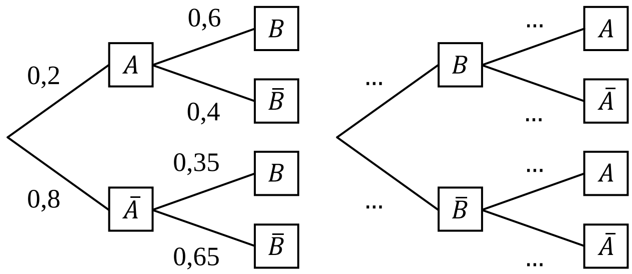
Variables	K et J sont des entiers naturels P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0{,}05 - 10^{-K}$ P prend la valeur $0{,}2 \times P + 0{,}04$ J prend la valeur $J + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

[1] Le démontrer.

Inversion du conditionnement

10 **(Inversion d'un arbre).** Une situation est modélisée par l'arbre ci-dessous à gauche, A et B désignant deux événements.
On se propose de compléter l'arbre à droite, appelé arbre inverse du précédent.



1. **a.** En utilisant l'arbre initial, calculer $P(A \cap B)$ ainsi que $P(\bar{A} \cap B)$.
   b. En déduire $P(B)$.
2. Calculer $P_B(A)$.
3. Calculer $P_{\bar{B}}(A)$.
4. Compléter l'arbre inversé.

11 Le dépistage de l'hyperthyroïdie s'effectue par un test basé sur le dosage de la TSH. Les résultats sont les suivants :

- chez les malades, 95 % de tests sont positifs ;
- chez les non malades, 99 % de tests sont négatifs.

Sachant que la fréquence (prévalence) de l'hyperthyroïdie dans la population est de 1,5 %, calculer

1. la probabilité d'être malade sachant que le test est positif (valeur prédictive positive du test) ;
2. la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est négatif (valeur prédictive négative du test).

12 Un joueur tire au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes et gagne s'il obtient un as. Mais on admet qu'un joueur sur trois est un tricheur, et que pour un tricheur, la probabilité d'obtenir un as est 1.

1. Un joueur tire une carte. Quelle est la probabilité que ce soit un as ?
2. Un joueur tire une carte et c'est un as. Quelle est la probabilité que le joueur soit un tricheur ?

13 Suite à une panne technique, un distributeur de boissons ne tient aucun compte de la commande faite par le client. Cette machine distribue soit un expresso, soit du chocolat, soit du thé en suivant une programmation erronée. Chaque boisson peut être sucrée ou non.

- La probabilité d'obtenir un expresso est $\frac{1}{2}$;
- la probabilité d'obtenir un thé sucré est $\frac{2}{9}$;
- si l'on obtient un expresso, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{5}{9}$;
- si l'on obtient un chocolat, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{1}{3}$.

On considère les événements suivants :

- T : « on a obtenu un thé » ;
- E : « on a obtenu un expresso » ;
- C : « on a obtenu un chocolat » ;
- S : « la boisson obtenue est sucrée ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un expresso sucré.
3. On sait que la probabilité d'obtenir une boisson sucrée est $\frac{5}{9}$. En déduire que la probabilité d'obtenir un chocolat sucré est $\frac{1}{18}$.
4. En déduire la probabilité d'obtenir un chocolat puis celle d'obtenir un thé.
5. Calculer $P_T(\bar{S})$.
6. Une personne programme la machine et obtient une boisson non sucrée. Son ami lui affirme : « Je pense que ta boisson est un expresso ! ». Dans quelle mesure a-t-il raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

Événements indépendants

14 Soit A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = \frac{1}{4}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

15 Soit A et B deux événements indépendants avec $P(A) = 0{,}35$ et $P(B) = 0{,}6$.
Calculer les probabilités de $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$.

16 On s'intéresse à un scooter. On considère les événements

- A : « le scooter tombe en panne de moteur » ;
- B : « le scooter a une crevaison ».

On suppose que A et B sont indépendants et que $P(A) = 0{,}03$ et $P(B) = 0{,}05$.
Déterminer la probabilité que le scooter soit en état de marche.

17 On donne ci-dessous la répartition de 150 étudiants selon la langue étudiée et l'activité sportive choisie.

	Tennis	Équitation	Voile
Anglais	45	18	27
Espagnol	33	9	18

On choisit un étudiant au hasard.
1. Les événements A : « étudier l'anglais » et T : « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?
2. Les événements E : « étudier l'espagnol » et V : « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

18 On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les événements :

- A : « le numéro obtenu est pair » ;
- B : « le numéro obtenu est un multiple de 3 » ;
- C : « le numéro obtenu est inférieur ou égal à 3 ».

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Même questions avec les événements A et C, puis avec B et C.

19 Une plante de génotype AA donne par autogamie une plante de génotype AA. De même, une plante de génotype aa donne une plante aa.
1. Déterminer les probabilités que la descendance de la première génération d'une plante de génotype Aa soit une plante de génotype AA, Aa ou aa.
2. Partant d'une plante hétérozygote (Aa à la génération 0), on constitue par autogamie des générations successives. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $(\mathrm{AA})_n$, $(\mathrm{Aa})_n$ et $(\mathrm{aa})_n$, les événements « la plante de la $n^{\text{ième}}$ génération est de génotype AA » (respectivement Aa et aa). On appelle x_n, y_n, z_n les probabilités de ces événements.
   a. Donner x_0, y_0, z_0 et calculer x_1, y_1, z_1.
   b. Illustrer par un arbre pondéré les génotypes possibles aux générations n et $n+1$.
   c. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les relations
   $$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4} y_n \text{ et } y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n.$$
   d. Exprimer de même z_{n+1} en fonction de y_n et z_n.
3. a. Exprimer y_n en fonction de n.
   b. Prouver que pour tout $n \geq 1$,
   $$x_n - x_0 = \frac{1}{4}(y_{n-1} + y_{n-2} + \cdots + y_0).$$
   c. Exprimer x_n en fonction de n et de même z_n en fonction de n.
4. Calculer les limites de ces suites et interpréter.

Problème

20 On étudie la mise en place d'un test diagnostique qui doit permettre de dépister une maladie dont la *prévalence* (fréquence) dans la population est notée p avec $0 < p < 1$.
On prélève au hasard une personne ayant été soumise au test. On définit les événements

- T : « la personne choisie a un test positif » ;
- M : « la personne choisie est malade ».

Pour ce test, le fabriquant indique :

- la probabilité $P_M(T)$ qu'un individu malade ait un test positif, appelé *sensibilité* du test, notée Se ;
- la probabilité $P_{\bar{M}}(\bar{T})$ qu'un individu sain ait un test négatif, appelé *spécificité* du test, notée Sp.

1. Illustrer la situation par un arbre pondéré ; y faire figurer p, Se, Sp et le compléter.
2. Soit J l'événement « le test délivre un diagnostic juste ».
   a. Justifier que $P(J) = p\,\mathrm{Se} + (1-p)\mathrm{Sp}$.
   b. Montrer que $P(J) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Se} = \mathrm{Sp} = 1$.
3. On appelle
   - *valeur prédictive positive* du test (VPP) la probabilité $P_T(M)$ d'être malade sachant que le test est positif ;
   - *valeur prédictive négative* du test (VPN) la probabilité $P_{\bar{T}}(\bar{M})$ d'être sain sachant que le test est négatif.

   a. Calculer $P(T)$ et $P(\bar{T})$ en fonction de p, Sp et Se.
   b. Calculer VPP et VPN en fonction de p, Sp et Se.
   On appelle *indice de Youden* du test le réel
   $$Y = \mathrm{Se} + \mathrm{Sp} - 1.$$
   c. Justifier que $-1 \leq Y \leq 1$. Que dire si $Y = 1$?
   d. Montrer que $\mathrm{VPP} \geq p \Leftrightarrow Y \geq 0$ et conclure sur la valeur diagnostique du test en fonction de la position de Y par rapport à 0 et 1.
4. **Influence de la prévalence sur VPP et VPN**
   On considère les fonctions v et w définies sur $]0;1[$ par
   $$v(p) = \mathrm{VPP} \text{ et } w(p) = \mathrm{VPN}.$$
   a. Montrer que $v(p) = \frac{p\mathrm{Se}}{pY+1-\mathrm{Sp}}$ et $w(p) = \frac{(p-1)\mathrm{Sp}}{pY-1}$.
   b. On suppose $0 < \mathrm{Se} < 1$ et $0 < \mathrm{Sp} < 1$. Démontrer que v est croissante sur $]0;1[$, w décroissante sur $]0;1[$ et tracer le tableau de variations des fonctions.
   c. Que peut-on dire de l'influence de la prévalence sur Se, Sp, VPP et VPN ?
5. **Application au diagnostic du paludisme**
   La prévalence du paludisme est de 90 % en Afrique et 0,1 % en France. Le test biologique utilisé a pour sensibilité $\mathrm{Se} = 0{,}95$ et pour spécificité $\mathrm{Sp} = 0{,}85$.
   a. Calculer VPP et VPN pour l'Afrique et la France.
   b. Que peut-on dire à un patient africain ou français selon que le test est positif ou négatif ?