Dérivation et fonctions trigonométriques

1. Compléments sur la dérivation

Théorème. Soit u une fonction à valeurs positives dérivable sur un intervalle I. Alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur $\{x \in I\ ; u(x) \neq 0\}$ et $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exemple

Soit $f: x \mapsto \sqrt{x^2+3x}$. La fonction f est définie si et seulement si $x^2+3x \geq 0$, construisons le tableau de signe de $x^2+3x = x(x+3)$ dont les racines sont 0 et -3.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
signe de x^2+3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi f est définie sur $]-\infty; -3] \cup [0; +\infty[$. Pour que f soit dérivable en x il suffit que $x^2+3x > 0$, ainsi f est dérivable sur $]-\infty; -3[\cup]0; +\infty[$ et sa dérivée est

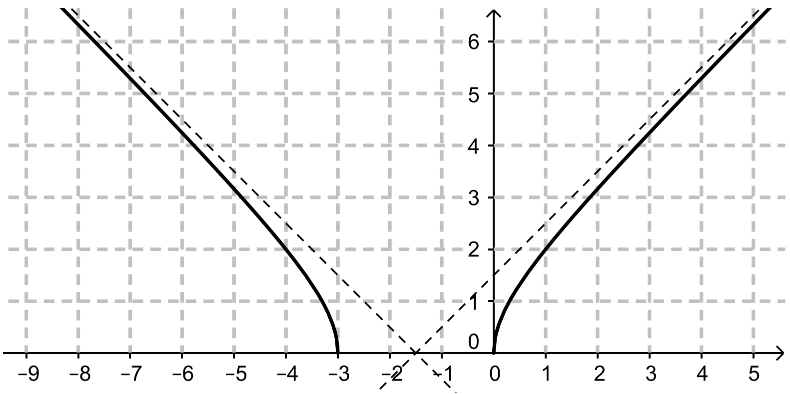
$$f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}.$$

On en déduit les variations de f.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
$2x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2\sqrt{x^2+3x}$		$+$	0				0	$+$	
$f'(x)$		$-$	‖				‖	$+$	
variations de f	$+\infty$	↘	0				0	↗	$+\infty$

Calculons les limites. On a $x^2+3x = x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$, on en déduit par opérations sur les limites $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2+3x) = +\infty$.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

Voici la courbe représentative de f.



Remarque (hors programme). La courbe de f possède deux asymptotes obliques, la droite d'équation $y = x + \frac{3}{2}$ en $+\infty$ et la droite d'équation $y = -x - \frac{3}{2}$ en $-\infty$.
Montrons par exemple le résultat en $+\infty$. On a

$$f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right) = \sqrt{x^2 + 3x} - \left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{(x^2+3x)-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+3x}+\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{-\frac{9}{4}}{\sqrt{x^2+3x}+\left(x+\frac{3}{2}\right)}.$$

Il est clair que le dénominateur tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi on a montré

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right)\right] = 0,$$

ce qui prouve que la droite Δ d'équation $y = x + \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
Par ailleurs $f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right) < 0$, donc la courbe de f est située sous Δ.

Théorème. Soit n un entier non nul, u une fonction dérivable sur un intervalle I, qui ne s'annule pas si $n < 0$. Alors u^n est dérivable sur I est $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

__**Exemple**__

Soit $f : x \mapsto \left(\frac{2x}{x+2}\right)^3$. La fonction f est définie sur $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$. La dérivée de $x \mapsto \frac{2x}{x+2}$ est $x \mapsto \frac{4}{(x+2)^2}$, par conséquent $f'(x) = 3 \times \frac{4}{(x+2)^2} \times \left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 = \frac{48x^2}{(x+2)^4}$, on a donc prouvé que la fonction est croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]-2; +\infty[$.

__**Exemple**__

Les exposants négatifs s'avèrent pratiques pour dériver certaines fonctions.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{(x^2+3)^3}$. On écrit $f(x) = 2(x^2 + 3)^{-3}$, donc sa dérivée est $f'(x) = 2 \times (-3) \times 2x \times (x^2 + 3)^{-4}$ que l'on peut écrire sans exposant négatif $f(x) = -\frac{12x}{(x^2+3)^4}$.

Théorème. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et J un intervalle tel que pour tout $x \in J$ on ait $ax + b \in I$. Alors la fonction $f : x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = au'(ax + b)$.

__**Exemple**__

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et f la fonction la fonction définie par $f(x) = u(-x)$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -u'(x)$.

Remarque. Plus généralement $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.

❖ Rappel des définitions

Définition. *Soit f une fonction, I un intervalle ouvert inclus dans son ensemble de définition et a un réel appartenant à I. Soit h un réel non nul tel que $a + h \in I$.*
Le <u>taux d'accroissement</u> de f entre a et $a + h$ est le rapport $r(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pour $h \neq 0$.
On dit que la fonction f est <u>dérivable</u> en a si $r(h)$ tend vers un réel lorsque h tend vers 0. Ce réel est appelé <u>nombre dérivé</u> de f en a et est noté $f'(a)$: $f'(a) = \lim\limits_{h\to0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Le nombre dérivé $f'(a)$ s'interprète graphiquement comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.
L'équation de cette tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$. Comme la fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$, cette fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

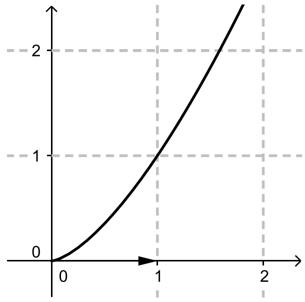
Par exemple la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe C_f a pour équation

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{3}{2}(x-1) + 1 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Pour $h > 0$, le taux d'accroissement entre 0 et h de f est

$$r(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h},$$

par conséquent $\lim\limits_{h\to 0^+} r(h) = \sqrt{0} = 0$. Cela montre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
Finalement f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$. La courbe de f admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente d'équation $y = 0$.



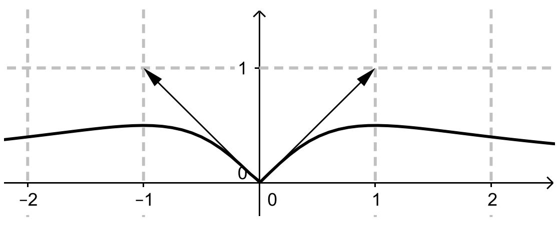
On retiendra donc que de cet exemple ce n'est pas parce que les formules générales ne s'appliquent pas que la fonction n'est pas dérivable.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$.
Si $x > 0$, on peut écrire $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et la fonction est donc dérivable sur $]0;+\infty[$. En écrivant $f(x) = -\frac{x}{x^2+1}$ on voit de même que f est dérivable sur $]-\infty;0[$.
Étudions le taux d'accroissement de f entre 0 et un réel h non nul.
Comme $f(0) = 0$, on a

$$r(h) = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} \times \frac{1}{h^2+1}.$$

Clairement $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h^2+1} = 1$.
Le terme $\frac{|h|}{h}$ nécessite d'envisager deux cas : Si $h > 0$, alors $\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$ et si $h < 0$, alors $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$, si bien que $\lim\limits_{h\to 0^+} r(h) = 1 \times 1 = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0^-} r(h) = -1$.
Cela montre que f n'est pas dérivable en 0. En revanche, elle est dérivable à gauche de 0 (avec $f'_g(0) = -1$) et à droite de 0 (avec $f'_d(0) = 1$). Graphiquement cela se traduit par la présence de deux demi-tangentes à la courbe de f en l'origine du repère.



Cet exemple montre que la réciproque du théorème affirmant que si une fonction est dérivable en un réel, elle y est continue, est fausse.

2. Étude des fonctions sinus et cosinus

❖ Définitions et premières propriétés

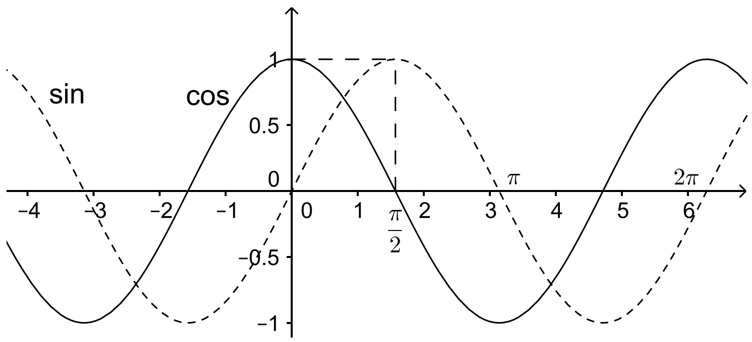
Définition. *On appelle fonction sinus la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto \sin x$*. On appelle fonction cosinus la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto \cos x$*.*

Théorème (périodicité). Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Les courbes de sinus et cosinus dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$

Théorème (parité). La fonction sinus est impaire, la fonction cosinus est paire c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.

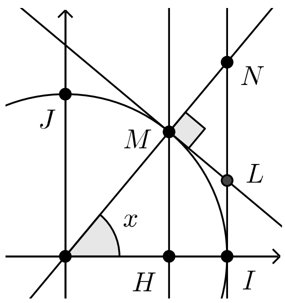
La courbe de sinus est donc symétrique par rapport à l'origine du repère et celle cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Courbe représentative des fonctions sinus et cosinus

Théorème. On a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

Démonstration. La première limite nécessite une définition rigoureuse du sinus que l'on a pas au lycée. Ici on se base sur le graphique ci-contre, où on a pris un angle x vérifiant $0 < x < \frac{\pi}{2}$. On rappelle que x est la longueur de l'arc MH. On a



- $MH \leq MI$ car MI est l'hypoténuse dans le triangle MHI, et comme $MI \leq x$ on a $MH \leq x$;
- $x \leq ML + LI \leq NL + LI = NI$.

Donc $MH \leq x \leq NI$. Mais $MH = \sin x$ et $NI = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, d'où $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$ puis $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$, ce qui donne finalement $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, alors $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, d'où $\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq 1$ d'après ce qui précède, et comme le sinus est impair et le cosinus pair, on a également $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ (continuité… voir ci-dessous), donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Pour la seconde limite, on utilise une formule de trigonométrie. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$ d'où $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ puis $\frac{1-\cos x}{x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$. Mais $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$, donc par composition $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 0$, d'où par les règles usuelles le résultat. ■

❖ Études des fonctions sinus et cosinus

Théorème. Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\sin'(x) = \cos x \text{ et } \cos'(x) = -\sin x.$$

En particulier elles sont continues sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$, prouvons que sinus est dérivable en a. On a

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} = \sin a \times \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \times \frac{\sin h}{h}.$$

D'après le théorème précédent, il vient $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \cos a$, ce qui prouve que sinus est dérivable en a de dérivée $\cos a$.

On procède de la même façon pour cosinus. ■

Corollaire. Soit a et b deux réels. Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin(ax+b) \text{ et } g(x) = \cos(ax+b)$$

sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = a\cos(ax+b)$ et $g'(x) = -a\sin(ax+b)$.

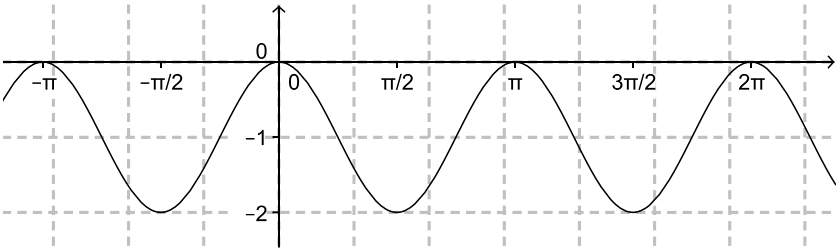
Exemple

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 1$.

1. Étudier la parité de f.
2. Démontrer que f est périodique de période π.
3. Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Déduire des questions précédentes la représentation graphique de f.

Réponse.

1. Pour tout x, on a $f(-x) = \cos(-2x) - 1 = \cos(2x) - 1 = f(x)$ car la fonction cos est paire. Donc f est paire.
2. Par 2π-périodicité de f, on a pour tout x,
$$f(x+\pi) = \cos\big(2(x+\pi)\big) - 1 = \cos(2x+2\pi) - 1 = \cos(2x) - 1$$
donc f est π-périodique.
3. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto -2\sin(2x)$, donc $f'(x) = -2\sin(2x)$. Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $2x \in [0; \pi]$, donc $\sin(2x) \geq 0$, donc $f'(x) \leq 0$, ainsi f est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. On construit la courbe de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ à l'aide de quelques valeurs de la fonction. Par parité, on en déduit la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, c'est-à-dire sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Comme cet intervalle a pour longueur π, on en déduit la courbe tout entière en appliquant des translations de vecteurs $k\pi\vec{\imath}$ où k est un entier.


0
−π
−π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
−1
−2