Fonctions trigonométriques – Exercices

Dérivation

1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leur ensemble de définition et de dérivabilité.

a. $f_1(x) = \sqrt{x+1}$ **b.** $f_2(x) = \sqrt{-x+3}$

c. $f_3(x) = \sqrt{5x-2}$ **d.** $f_4(x) = \sqrt{x^2+1}$

e. $f_5(x) = \sqrt{1-x^2}$ **f.** $f_6(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+3}}$

2 Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leur ensemble de définition et de dérivabilité.

a. $f_1(x) = (2x+3)^5$ **b.** $f_2(x) = (5-x^2)^3$

c. $f_3(x) = \left(\frac{x+1}{2-x}\right)^2$ **d.** $f_4(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$

e. $f_5(x) = \frac{4}{(x^2+1)^3}$ **f.** $f_6(x) = \frac{(x^3+1)^3}{\sqrt{x}}$

3 Soit la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{5-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{-x^2+10x+1}{2\sqrt{(x^2+1)(5-x)^3}}$ puis construire le tableau de variation de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

4 Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x(4-x)}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

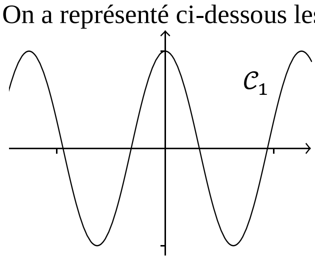
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que f est dérivable sur $]0;4[$ et donner f'.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? En 4 ?
4. Étudier les variations de f.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions sur $[0;4]$.
6. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

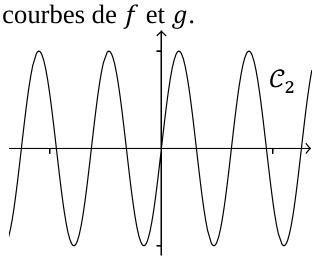
Sinus et cosinus

5 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin 2x \text{ et } g(x) = 2\cos x.$$

On a représenté ci-dessous les courbes de f et g.



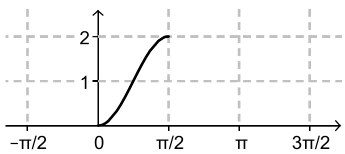


1. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Qu'en déduit-on pour la courbe de f ?
2. Exprimer $g(-x)$ en fonction de $g(x)$. Qu'en déduit-on pour la courbe de g ?
3. Attribuer à chaque fonction sa courbe.
4. Étudier la périodicité de f et g.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \cos(2x).$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée ci-contre sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.



1. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$, puis compléter $\mathcal{C}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.
2. Exprimer $f(x+\pi)$ en fonction de $f(x)$, puis compléter $\mathcal{C}$ sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

7 Déterminer le signe des expressions suivantes sur l'intervalle $[0;\pi]$.

a. $f_1(x) = 2 + \sin x$ **b.** $f_2(x) = 1 + \cos x$

c. $f_3(x) = \sin x - 2$ **d.** $f_4(x) = 1 - \sin^2 x$

8 À l'aide d'un cercle trigonométrique, résoudre l'inéquation $\cos x > \frac{1}{2}$ sur $[-\pi;\pi]$ et en déduire le signe de $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}$ sur $[-\pi;\pi]$. Même question sur $[0;2\pi]$.

9 Construire sur l'intervalle $[0;2\pi]$ le tableau de signe de $f(x) = \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $g(x) = \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$.
2. **a.** Exprimer $f(-x)$ et $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
   b. Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$.
3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0;\pi]$.
4. Construire le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$, construire la courbe de f sur $[0;\pi]$ puis sur $[-\pi;3\pi]$.

11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\cos x - \cos 2x.$$

1. **a.** Calculer $f(-x)$ et $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
   b. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$.
2. **a.** Montrer que $f'(x) = 2\sin x\,(2\cos x - 1)$.
   b. Résoudre sur $[0;\pi]$ l'inéquation $2\cos x - 1 \geq 0$.
   c. En déduire le signe de $f'(x)$ puis construire le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$.
3. Construire la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$ dans un repère adapté
4. On considère l'équation $\cos 2x = 2\cos x$.
   Montrer grâce à l'étude de la fonction f que cette équation admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;\pi]$ et donner un encadrement à 10^{-2} près de α. Combien l'équation admet-elle de solution sur l'intervalle $[-2017\pi\,;2017\pi]$?

12 Déterminer les limites suivantes (distinguer les limites à droite et à gauche si nécessaire).

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}$

13 Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leur ensemble de définition et de dérivabilité.

a. $f_1(x) = x - 2\cos x$ **b.** $f_2(x) = \sin x - \cos x$

c. $f_3(x) = \frac{1}{\sin x}$ **d.** $f_4(x) = \cos(3x)$

e. $f_5(x) = \cos^2(x)$ **f.** $f_6(x) = \frac{1}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)}$

14 On définit la fonction tangente par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
On la note $f(x)$ dans la suite.

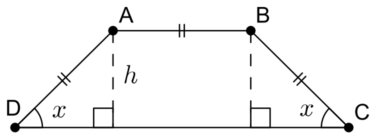
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Exprimer $f(x+\pi)$ et $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

3. Déterminer la limite de f en $\frac{\pi}{2}$. Qu'en déduit-on pour la courbe C ?
4. **a.** Calculer $f'(x)$. Montrer que $f'(x) = 1 + \left(f(x)\right)^2$.
   b. Donner les variations de f sur I puis sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
5. **a.** Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
   b. Étudier la position relative de C et T sur I.
   c. Tracer C et T sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x - \sin x.$$
1. f est-elle paire ? impaire ? périodique ?
2. Montrer que f est croissante sur $[0;+\infty[$.
3. En déduire le signe de f.
4. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par
$$g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$$
Montrer que $g'(x) = f(x)$ puis que $g(x) \geq 0$.
5. **a.** En déduire que pour tout x positif
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1.$$
   b. L'inégalité est-elle encore vraie si x est négatif ?
6. En étudiant la fonction $h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ montrer que pour tout x positif, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

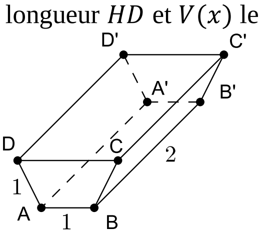
Problèmes

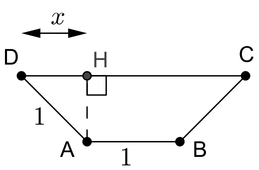
16 On considère le trapèze isocèle $ABCD$ ci-contre où
$AD = AB = BC = 1$.
On souhaite déterminer l'angle x pour que l'aire du trapèze soit maximale.



1. Exprimer la hauteur h en fonction de l'angle x.
2. Démontrer que l'aire f du trapèze est définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = (\cos x + 1)\sin x$.
3. **a.** Démontrer que $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.
   b. Factoriser $2X^2 + X - 1$.
   c. En déduire le signe de f' et conclure.

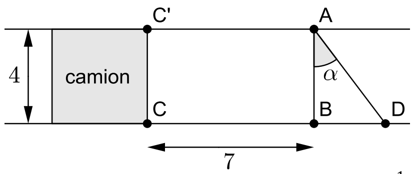
17 Un récipient a la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle $ABCD$.
Toutes les dimensions de ce prisme sont fixes, sauf la longueur CD. On donne $AB = BC = AD = 1$ et $BB' = 2$.
On cherche la dimension à donner à la grande base $[CD]$ du trapèze $ABCD$ pour que le volume du récipient soit maximal.
On appelle H le projeté orthogonal de A sur $[CD]$. On note x la longueur HD et $V(x)$ le volume du récipient.





1. Quel est l'ensemble de définition de V ?
2. Exprimer l'aire du trapèze $ABCD$ en fonction de x.
3. Démontrer que $V(x) = 2(x+1)\sqrt{1-x^2}$.
4. Montrer que $V'(x) = -\frac{2\left(2x^2+x-1\right)}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. Déterminer pour quelle valeur de x le volume est maximal.

18 **(Pauvre bête)** Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km.h^{-1}.



Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite à 30 km.h^{-1}.
L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$.
Le lapin part du point A en direction de D. On désigne par α une mesure en radian de l'angle $\widehat{BAD}$ avec $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.
On se demande s'il est possible que le lapin traverse sans se faire écraser.
1. Montrer que $BD = \frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}$ puis déterminer les distances CD et AD en fonction de α.
2. Montrer que le temps t_1 mis par le camion pour parcourir la distance CD est $\frac{7}{60\,000} + \frac{4\sin\alpha}{60\,000\cos\alpha}$ (en heures), puis déterminer le temps t_2 (en heures) mis par le lapin pour parcourir la distance AD.
3. Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par
$$f(\alpha) = \frac{7}{2} + 2\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{4}{\cos\alpha}.$$
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\alpha) > 0$.
4. Exprimer $f'(\alpha)$ en fonction de α et démontrer que $f'(\alpha)$ est du signe de $1 - 2\sin\alpha$.
5. Dresser le tableau de variation de f et conclure.
6. On souhaite résoudre l'équation $f(\alpha) = 0$.
   a. Montrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(\alpha) = 0$ admet deux solutions.
   b. Montrer que $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 7\cos\alpha = 8 - 4\sin\alpha \Leftrightarrow 65\sin^2\alpha - 64\sin\alpha + 15 = 0$.
   c. En déduire que le lapin ne sera pas écrasé si et seulement si $\alpha \in [22{,}62°; 36{,}87°]$ (à 10^{-2} près).

19 **(Strophoïde)** Dans un repère orthonormé, on considère le point $F(1;0)$ et un point variable A de l'axe des ordonnées d'ordonnée $t \in \mathbb{R}$.
On appelle S l'ensemble des points M de la droite (AF) tels que $MA = OA$ lorsque A varie sur l'axe des ordonnées et on appelle strophoïde l'ensemble $S' = S \cup \{F\}$.
Étant donné deux réels x et y, on appelle **P** la propriété :
$$\exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x^2 + (y-t)^2 = t^2 \\ y = t(1-x) \end{cases}.$$
1. Montrer que $M(x;y) \in S \Leftrightarrow$ **P**.
2. **a.** Montrer que si $x \neq 1$, on a l'équivalence
$$\mathbf{P} \Leftrightarrow x^2(1-x) = y^2(1+x).$$
   b. En déduire
$$M(x;y) \in S' \Leftrightarrow x^2(1-x) = y^2(1+x).$$
3. Montrer que si $(x;y) \in S'$, alors $-1 < x \leq 1$. Comment cela se traduit-il graphiquement pour S' ?
4. Soit $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ définie sur $]-1;1]$. Montrer
$$M(x;y) \in S' \Leftrightarrow \big(y = f(x) \text{ ou } y = -f(x)\big).$$
En déduire que S' est la réunion des courbes de f et $-f$.
5. Montrer que $f'(x) = \frac{-x^2-x+1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. Construire le tableau de variations de f et le compléter avec la limite en -1.