Fonction exponentielle

1. Fonction exponentielle

❖ Définition et variation

Théorème – Définition. Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle et se note exp.

En conséquence, $\exp(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp x$.

Démonstration. L'existence d'une telle fonction est admise, on va prouver l'unicité. Pour cela on suppose qu'il existe deux fonctions f et g qui vérifient les hypothèses du théorème, c'est-à-dire $f' = f$, $f(0) = 1$, $g' = g$ et $g(0) = 1$ et on doit montrer que $f = g$.
Démontrons d'abord que g (ou f) ne peut pas s'annuler. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)g(-x)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$h'(x) = g'(x)g(-x) - g(x)g'(-x).$$

Or $g(x) = g'(x)$ pour tout x, donc

$$h'(x) = g(x)g(-x) - g(x)g(-x) = 0,$$

ce qui prouve que h est une fonction constante. Or $h(0) = g(0)^2 = 1$, donc finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) = 1$. S'il existait un réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$, on aurait $h(x_0) = 0$, contrairement à ce qui vient d'être montré. Ainsi la fonction g ne s'annule par sur $\mathbb{R}$, ce qui nous autorise à considérer la fonction $\frac{f}{g}$. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{\left(g(x)\right)^2} = 0$$

La fonction $\frac{f}{g}$ est donc constante. Comme $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1$, d'où $f(x) = g(x)$, ce qui prouve bien que $f = g$. ∎

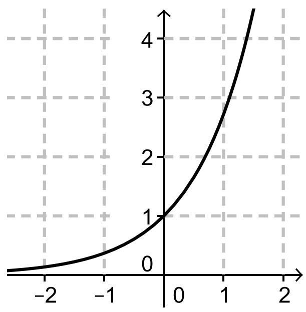
Théorème. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On a vu dans la démonstration du théorème précédent que la fonction exponentielle ne s'annule par sur $\mathbb{R}$.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x_0) < 0$.
La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue. Comme $\exp(0) = 1$, le réel 0 est compris entre $\exp(0)$ et $\exp(x_0)$, donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires, il existe un réel α tel que $\exp(\alpha) = 0$, ce qui contredit le fait que exp ne s'annule pas.
Par conséquent tout pour $x \in \mathbb{R}$, on a bien $\exp x > 0$. ∎

Théorème. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp x > 0$, donc exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ∎

La représentation graphique de exp est donnée ci-contre.



Corollaire. Pour tout réel x et y on a

$$\exp x = \exp y \Leftrightarrow x = y \text{ et } \exp x < \exp y \Leftrightarrow x < y.$$

Démonstration. Si $x = y$, alors $\exp x = \exp y$. Réciproquement, supposons $\exp x = \exp y$. Si $x \neq y$, on a soit $x < y$, soit $x > y$ et donc par croissante stricte de l'exponentielle, on a $\exp x < \exp y$ ou $\exp x > \exp y$, contrairement à l'hypothèse $\exp x = \exp y$. Finalement on en déduit que $x = y$. La deuxième assertion résulte de la croissance stricte de l'exponentielle.

Exemple

Résoudre les équations suivantes.

a. $\exp(x+1) = \exp(2x-1)$ **b.** $\exp(3x) = 1$ **c.** $\exp(3x-1) \geq \exp(2x)$

Réponse.

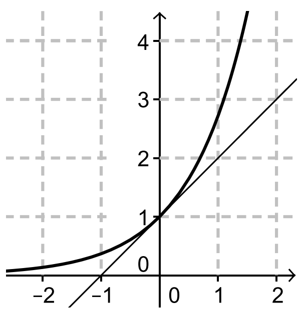
a. $\exp(x+1) = \exp(2x-1) \Leftrightarrow x+1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 2$, donc $S = \{2\}$.

b. Comme $1 = e^0$, on a $\exp(3x) = 1 \Leftrightarrow \exp(3x) = \exp 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, d'où $S = \{0\}$.

c. $\exp(3x-1) \geq \exp(2x) \Leftrightarrow 3x - 1 \geq 2x \Leftrightarrow x \geq 1$, donc $S = [1; +\infty[$.

Proposition. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp x \geq x + 1$.

Remarquons que cette inégalité traduit le fait que la courbe de la fonction exponentielle est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0. En effet l'équation de cette tangente est $y = \exp'(0)(x-0) + e^0$, soit $y = x + 1$.



Démonstration. Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp x - x - 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \exp x - 1$. On a

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \exp x > 1 \Leftrightarrow \exp x > \exp 0 \Leftrightarrow x > 0,$$

donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, elle atteint son minimum en 0 et il vaut $f(0) = 0$. Par suite pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp x - x - 1 \geq 0$ et donc $\exp x \geq x + 1$. ■

❖ **Relation fonctionnelle et corollaire**

Théorème (relation fonctionnelle). Pour tous réels x et y, on a

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y).$$

Démonstration. Soit y un réel fixé et considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_y(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp y}.$$

On a $g_y(0) = 1$ et $g'_y(x) = g_y(x)$. Donc par le théorème d'unicité de la fonction exponentielle, on a que $g_y(x) = \exp x$, c'est-à-dire $\frac{\exp(x+y)}{\exp y} = \exp x$, donc finalement

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)\,. \blacksquare$$

Corollaire. Pour tous réels x et y et tout entier relatif n, on a

1. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ **2.** $\exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y}$

3. $\exp nx = (\exp x)^n$ **4.** $\exp \frac{x}{2} = \sqrt{\exp x}$

Démonstration.

1. En prenant $y = -x$ dans la relation fonctionnelle, on obtient
$$\exp x \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp 0 = 1$$
Comme la fonction exponentielle ne s'annule par sur $\mathbb{R}$, on en déduit donc la formule annoncée.

2. D'après la relation fonctionnelle et le 1. on a
$$\exp(x - y) = \exp x \exp(-y) = \exp x \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp x}{\exp y}.$$

3. Démontrons déjà la propriété pour $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
- Pour $n = 0$, on a $\exp nx = \exp 0 = 1$ et $(\exp x)^0 = 1$, donc la propriété est vraie au rang 0.
- Supposons la propriété vraie au rang n. Alors
$$(\exp x)^{n+1} = (\exp x)^n \exp x.$$
Mais par hypothèse de récurrence $(\exp x)^n = \exp nx$, donc
$$(\exp x)^{n+1} = \exp nx \exp x = \exp(nx + x) = \exp(n + 1)x,$$
ce qui montre que la propriété est héréditaire.

Soit maintenant $n \in \mathbb{Z}$, avec $n < 0$. Posons $p = -n \in \mathbb{N}$. On a donc en utilisant 1. ainsi que ce qui vient d'être prouvé sur $\mathbb{N}$,
$$(\exp x)^n = (\exp x)^{-p} = \frac{1}{(\exp x)^p} = \frac{1}{\exp px} = \frac{1}{\exp(-nx)} = \exp nx.$$

4. On a $\left(\exp \frac{x}{2}\right)^2 = \exp 2 \times \frac{x}{2} = \exp x$, donc $\exp \frac{x}{2} = \sqrt{\exp x}$. ∎

❖ Notation e^x

Définition. *L'image de* 1 *par la fonction exponentielle est notée* e*, ainsi* $\exp(1) = e$*. À l'aide de la calculatrice,* $e \approx 2{,}718$.

Grâce au corollaire, on peut écrire $\exp n = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n = e^n$, ce qui incite à introduire la notation suivante : pour tout réel x, $\exp x = e^x$.
La relation fonctionnelle et son corollaire se reformulent alors de la façon suivante en prolongeant naturellement les propriétés connues sur les puissances.

Corollaire. Pour tous réels x et y et tout entier relatif n, on a
$e^x e^y = e^{x+y}$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$; $e^{nx} = (e^x)^n$

Exemple

Montrer les égalités suivantes.

a. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$

b. $\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^x+1}$

Réponse.

a. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$
$$= (e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2 - ((e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2)$$
$$= e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x})$$
$$= e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}$$
$$= 4.$$

b. Commençons par multiplier le numérateur et le dénominateur par e^x. On obtient donc $\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{(1-e^{-x})e^x}{(1+e^{-x})e^x} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$. Par ailleurs $1 - \frac{2}{e^x+1} = \frac{(e^x+1)-2}{e^x+1} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$, ce qui prouve l'égalité.

❖ **Dérivée de e^u**

Théorème (admis). Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est $u'e^u$.

Exemple

Soit f la fonction $x \mapsto e^{x^2-x+1}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x+1}.$$

2. Limites liées à la fonction exponentielle

❖ **Limites de la fonction exponentielle**

Théorème. On a les limites remarquables suivantes
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Démonstration. On a démontré dans le premier paragraphe que $e^x \geq x+1$.
Étant donné que $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, d'après un théorème de comparaison il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
Enfin pour montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on écrit que $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$. ■

Le tableau de variation complet de la fonction exponentielle est donc le suivant.

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0	$\nearrow$ $+\infty$

❖ **Croissance comparée**

Théorème. On a les résultats suivants.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0.$$

Démonstration.
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x \geq x+1$, d'où $e^x \geq x$ et donc $e^{x/2} \geq \frac{x}{2}$. En supposant $x > 0$ et en élevant au carré, il vient $e^x \geq \frac{x^2}{4}$, donc en divisant par x, on a $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{4} = +\infty$, il vient donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
Effectuons le changement de variable $X = -x$. On peut écrire
$$xe^x = -Xe^{-X} = -\frac{X}{e^X} = -\frac{1}{\frac{e^X}{X}}.$$
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$. ■

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{e^{2x-1}}{x+1}$.

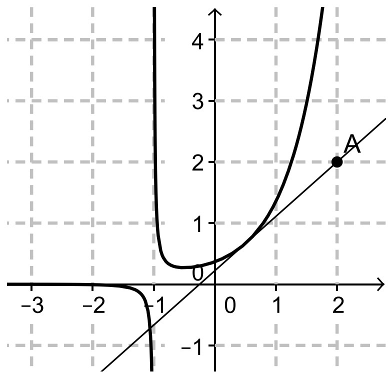
1. Étudier les variations de f.
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.
3. Montrer que le point $A(2;2)$ appartient à la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Réponse.

1. La fonction $x\mapsto 2x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $x\mapsto e^{2x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x\mapsto 2e^{2x-1}$. Il en résulte que f est dérivable là où elle est définie. On a
$$f'(x)=\frac{2e^{2x-1}\times(x+1)-e^{2x-1}\times 1}{(x+1)^2}=\frac{(2(x+1)-1)e^{2x-1}}{(x+1)^2}=\frac{(2x+1)e^{2x-1}}{(x+1)^2}.$$
Pour tout réel x, $(x+1)^2\geq 0$ et $e^{2x-1}>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $2x+1$, d'où le tableau de variation suivant.
Le minimum de f sur $]-1;+\infty[$ est $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2e^{-2}$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	||	$\searrow$	$2e^{-2}$	$\nearrow$	

2. **Limite en $-\infty$**
On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x-1}=0$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)$. Il en résulte par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.
Limite en -1
On a $\lim\limits_{x\to-1}e^{2x-1}=e^{-3}>0$ et $\lim\limits_{x\to-1^-}x+1=0^-$, on en déduit par quotient, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$. De même $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$.
Limite en $+\infty$
On se ramène à $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ en mettant en facteur ce qu'il faut. On peut écrire
$$f(x)=\frac{e^{x}e^{x-1}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{e^x}{x}\times\frac{e^{x-1}}{1+\frac{1}{x}}.$$
La limite du second facteur ne pose pas de problème lorsque $x\to+\infty$: le numérateur tend vers $+\infty$ et le dénominateur vers 1, donc le second facteur tend vers $+\infty$. Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.



x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$2e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Quelques calculs montrent que $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{9}$, donc la tangente T a pour équation $y=\frac{8}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}$, soit encore $y=\frac{8}{9}x+\frac{2}{9}$.
On vérifie alors immédiatement que le point $A(2;2)$ appartient à T.

❖ Une autre limite

> **Théorème.** On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-1}{x} = 1$.

Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable en 0 et son nombre dérivé en 0 est 1, donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{0+h}-e^0}{h} = 1$, ce qui est bien la limite annoncée. ■

Cela signifie que pour des valeurs proches de 0, $e^x \approx 1 + x$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{\frac{1}{x}} - x$.
On a $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} = \frac{e^x-1}{x} = 1$, on obtient par composition $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 1$.

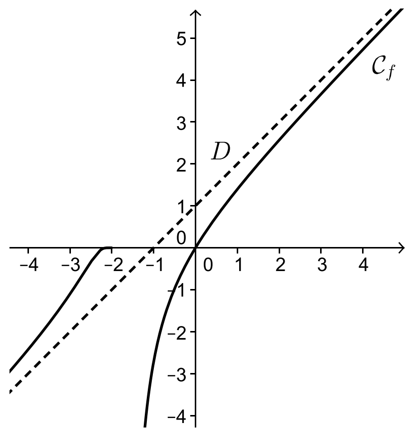
Exemple

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ par $f(x) = xe^{\frac{1}{x+2}}$.

La détermination des limites aux bornes de l'ensemble de définition ne pose pas de difficulté. On a

$$f'(x) = 1 \times e^{\frac{1}{x+2}} - \frac{x}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x+2}} = \frac{x^2+3x+4}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x+2}}.$$

Le discriminant de $x^2 + 3x + 4$ est strictement négatif, la fonction f est donc strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; -2[$ et $]-2; +\infty[$.



Lorsque x tend vers $\pm\infty$, la fraction $\frac{1}{x+2}$ tend vers 0 si bien que $e^{\frac{1}{x+2}} \approx \frac{1}{x+2} + 1 = \frac{x+3}{x+2}$ et donc $f(x) \approx \frac{x(x+3)}{x+2}$.
On constate d'ailleurs que les courbes représentatives de f et $g: x \mapsto \frac{x(x+3)}{x+2}$ sont très proches lorsque x tend vers $\pm\infty$.
En remarquant que

$$\frac{x(x+3)}{x+2} = \frac{x^2+3x}{x+2} = \frac{(x+2)(x+1)-2}{x+2} = x + 1 - \frac{2}{x+2}$$

on voit que lorsque x tend vers $\pm\infty$ on a $g(x) \approx x + 1$. Finalement $f(x) \approx x + 1$. Graphiquement cela montre que la droite d'équation $D: y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $\pm\infty$.
Montrons cela proprement. Il s'agit de prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (x + 1)\big) = 0$.

Posons $h(x) = \frac{e^{\frac{1}{x+2}}-1}{\frac{1}{x+2}}$. Comme $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ on a par composition d'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$. Par définition de $h(x)$, on peut écrire $e^{\frac{1}{x+2}} = \frac{h(x)}{x+2} + 1$, d'où

$$f(x) = \frac{x}{x+2} h(x) + x$$

donc $f(x) - (x + 1) = \frac{x}{x+2} h(x) - 1$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+2} = 1$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x + 1) = 0$. On a bien sûr un résultat identique en $-\infty$.