Fonction exponentielle – Exercices

Variations

1 Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.
a. $f(x) = \exp x + 2x$ **b.** $g(x) = -4\exp x$

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\exp x$.
1. Conjecturer les variations de f à l'aide de la calculatrice.
2. Montrer que $f'(x) = (x+1)\exp x$.
3. En déduire les variations de f.

3 Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.
a. $f_1(x) = (x+2)\exp x$ **b.** $f_2(x) = 2(3-x)e^x$
c. $f_3(x) = x^2\exp x$ **d.** $f_4(x) = (3-x^2)e^x$

4 Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\exp x}{x}$. Déterminer les variations de f.

Résolution d'équations et inéquations

5 Résoudre les équations suivantes.
a. $\exp(4x) = \exp(2x+4)$ **b.** $\exp(x-x^2) = 1$
c. $e^x - e^{-x} = 0$ **d.** $e^{4x} = \frac{1}{e}$

6 Montrer que l'équation $e^x = 2$ n'admet qu'une seule solution sur $[0;1]$, puis déterminer un encadrement à 10^{-3} de la solution.

7 Résoudre les inéquations suivantes.
a. $\exp(2x+4) \geq \exp x$ **b.** $\exp(x^2+2x) < 1$
c. $e^x < e^{2x}$ **d.** $e^{x+1} < e^{-x^2}$

Propriétés de calcul de exp

8 Écrire sous la forme e^k les expressions suivantes, où k est un entier relatif.
a. $e^{\frac{5}{2}} \times \sqrt{e}$ **b.** $\frac{e^{-4}}{e} \times e^{10}$ **c.** $\frac{(e^2)^3}{e^4}$

9 Simplifier les expressions suivantes.
a. $e^{x+2} \times e^{3x}$ **b.** $\frac{e^{1-x}}{e^{3x+4}}$ **c.** $\frac{(e^{x-1})^2}{e^{2x}}$

10 On souhaite résoudre $e^{2x} + e^x = 2$ (E).
1. Montrer que (E) équivaut à ($X^2 + X = 2$ et $X = e^x$).
2. Résoudre alors (E).

11 Soit $f(x) = 3e^{2x} - e^x - 2$.
1. Factoriser $3X^2 - X - 2$.
2. Factoriser $f(x)$ et en déduire son signe.

Fonction e^u

12 Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.
a. $f(x) = e^{x^3}$ **b.** $g(x) = e^{x^2}$
c. $h(x) = e^{-x} - x^3$

13 Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.
a. $f_1(x) = (x+2)e^{-x}$ **b.** $f_2(x) = x^2e^{-x}$
c. $f_3(x) = (2x+3)e^{x^2}$ **d.** $f_4(x) = (3-x^2)e^{-x}$

14 Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.
1. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.
2. En déduire les variations de f.

15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x + 1 + xe^{-x}.$$
Soit C_f sa courbe représentative.
1. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f''(x) = (x-2)e^{-x}$.
b. Étudier le signe de f'', en déduire les variations de f' puis que pour tout x, $f'(x) > 0$.
c. En déduire les variations de f.
2. a. Déterminer l'équation de tangente T à C_f au point d'abscisse 2.
b. Montrer que T passe par le point de coordonnées $A(4;5)$.

16 Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$.
1. Montrer que la fonction f est impaire.
2. Calculer la dérivée de f et étudier les variations de f.

17 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}$.
1. On pose $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et donner un encadrement à 10^{-3} près de α.
2. Montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signe contraire et en déduire les variations de f.
3. Démontrer l'égalité $\alpha^2 + 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ pour en déduire que le maximum de f est $f(\alpha) = \frac{\alpha^2e^{-\alpha}}{1-\alpha^2}$.
4. Montrer que la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2e^{-x}}{1-x^2}$ sur $[0;1[$ a pour dérivée $h'(x) = \frac{x(x^3-x+2)e^{-x}}{1-x^2}$ et est strictement croissante.
5. En déduire un encadrement à 10^{-2} près de $f(\alpha)$.

18 Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroute. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. Au bout de x centaines de jours d'exploitation, la production journalière sur ce site, en millier de tonnes, est $f(x) = (2x^2+3x)e^{-x}$, où $x \in [0;6]$.
1. a. Démontrer que pour tout $x \in [0;6]$
$$f'(x) = (-2x^2 + x + 3)e^{-x}.$$
b. Construire le tableau de variation de f.
c. Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale ?
2. a. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 1$ sur $[0;6]$.
b. Déterminer au bout de combien de jours la production sera inférieure à 1000 tonnes par jour après avoir été maximale.

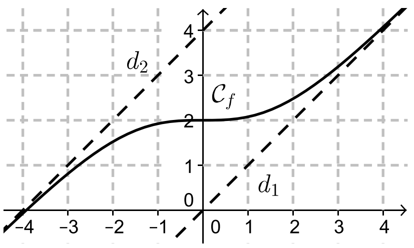
19 Soit (u_n) la suite définie par
$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 3 - e^{-u_n}.$$
On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - e^{-x}$.

1. Étudier les variations de f.
2. **a.** Démontrer que (u_n) est croissante.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 3.
   c. Que peut-on en déduire pour (u_n) ?

20 QCM, une seule réponse est exacte. Il faut justifier.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (2x-1)e^{-x}.$$

1. On a…
   a. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{e}}$ **b.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{e}}$
   c. $f(0) = 1$ **d.** $f(1) = \frac{1}{e}$
2. La courbe représentative de f est située au-dessous de l'axe des abscisses sur…
   a. $\mathbb{R}$ **b.** jamais
   c. $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ **d.** $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$
3. La dérivée f' est donnée par $f'(x) = \ldots$
   a. $(-2x+3)e^{-x}$ **b.** $(2x-1)e^{-x}$
   c. $(2x+1)e^{-x}$ **d.** $-2e^{-x}$
4. Le maximum de f est…
   a. $\frac{2e}{\sqrt{e}}$ **b.** $0{,}44$
   c. $2e^{\frac{3}{2}}$ **d.** $\frac{2}{e\sqrt{e}}$
5. La tangente au point d'abscisse 0 à la courbe de f a pour équation…
   a. $y = 2x - 1$ **b.** $y = 3x$
   c. $y = 3x - 1$ **d.** $y = 2x$
6. L'équation $f(x) = 0{,}1$ admet sur l'intervalle $[0; 4]$ …
   a. 0 solution **b.** 1 solution
   c. 2 solutions **d.** on ne peut pas savoir
7. Un encadrement à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $f(x) = -2$ est…
   a. $-0{,}27 < \alpha < -0{,}26$ **b.** $-0{,}26 < \alpha < -0{,}27$
   c. $-36{,}95 < \alpha < -36{,}94$ **d.** $0{,}40 < \alpha < 0{,}41$

21 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{4}{1+e^x}$.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de f ainsi que les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $y = x$ et $y = x + 4$.



1. Conjecturer les positions relatives de $\mathcal{C}$ avec d_1 et d_2.
2. **a.** Étudier le signe de $f(x) - x$.
   b. En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et d_1.
3. **a.** Montrer que $f(x) - x = \frac{-4e^x}{1+e^x}$.
   b. En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et d_2.
4. Montrer que $f'(x) = \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$.
   a. Déterminer les variations de f.
   b. Justifier que $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale.

Limites

22 Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.
a. $f(x) = -2e^x$ **b.** $f(x) = 1 - e^x$
c. $f(x) = e^x + x$ **d.** $f(x) = e^x + 2x - 1$

23 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x}e^x$.
1. Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?
2. Calculer les limites aux bornes de D_f.
3. Étudier les variations de f.

24 Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.
a. $f(x) = e^x - x$ **b.** $f(x) = (x+1)e^x$
c. $f(x) = 4xe^{-x}$ **d.** $f(x) = x - e^{-x}$
e. $f(x) = \frac{e^x-4}{e^x+2}$ **f.** $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

25 Calculer les limites suivantes en distinguant si nécessaire les limites à droite et à gauche.
a. $\lim\limits_{x\to 1} \exp\left(\frac{2}{x-1}\right)$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{1-e^x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

26 Calculer les limites suivantes en distinguant si nécessaire les limites à droite et à gauche.
a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2}{x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}$

27 On considère un entier naturel n non nul et la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x}$.
1. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Calculer $f_n'(x)$ et déterminer les variations de f_n.
3. On note y_n la valeur du minimum de f_n et x_n le réel en lequel il est atteint. Étudier les suites x_n et y_n.

28 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = x\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ et C sa courbe dans un repère.
1. Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f puis celle en 0 en écrivant $f(x) = x^3 \times \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$.
2. Étudier les variations de f et tracer C.
3. Montrer que $f(x) - x = -\frac{1}{x} \times \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-1}{-\frac{1}{x^2}}$ et en déduire la limite de $f(x) - x$ en $-\infty$ et $+\infty$. Quelle est la conséquence graphique pour C et la droite $\Delta:\ y = x$?

29 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = (x+5)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$.
1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$ et 1.
2. Démontrer que $f'(x) = \frac{(x-4)(x+1)}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$.
3. Construire le tableau de variations de f.
4. Construire la courbe C de f dans un repère orthogonal.
5. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 6$.
   a. On pose $h(x) = (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right]$. Démontrer en utilisant une limite du cours que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$.
   b. Montrer que $f(x) - (x+6) = h(x) + 6e^{\frac{1}{x-1}} - 7$.
   c. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+6)]$.
   d. Qu'en déduit-on pour C et Δ ?

Problèmes, sujet du baccalauréat

30 *(2014, Polynésie).* Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$.
On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes C_f et C_g ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de C_g et Δ

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

b. Justifier que, pour tout réel x,

$$h(x) = x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right).$$

En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

c. Calculer $h'(x)$ et étudier son signe.

d. Dresser le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$.

e. En déduire que, pour tout réel x, $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$.

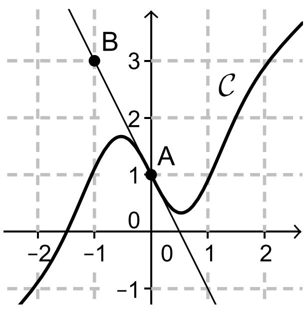
f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ ?

3. Étude de la position relative des courbes C_f et C_g

a. Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

b. Déterminer la position relative de C_f et C_g.

31 *(2014, métropole).* Sur le graphique ci-contre, on a tracé, dans un repère orthonormé une courbe C et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0;1)$ et $(-1;3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est C.

On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x, $f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}$.

1. a. Justifier que la courbe C passe par le point A.

b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

c. Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe C au point A.

Déterminer la valeur du réel a.

2. D'après la question précédente, pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$$

et $f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.

a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1;0]$, $f(x) > 0$.

b. Démontrer que pour tout réel $x \leq -1$, $f'(x) > 0$.

c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

Justifier que $c < -\frac{3}{2} + 2.10^{-2}$.

32 *(2015, centres étrangers).* Soit a un nombre réel fixé non nul. Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :

$$u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1).$$

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x

$$g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1).$$

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 0$.

b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0{,}02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que … … … Fin tant que
Sortie	Afficher n

a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

33 **(Écriture de e sous forme de série).** Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = -e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right),$$

où l'on a posé $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ pour $n \geq 1$ et $0! = 1$.

1. a. Justifier que pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$.

b. Montrer que $f_n'(x) = \frac{e^{-x}x^n}{n!}$ pour $n \geq 0$.

c. En déduire que pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$0 \leq f_n'(x) \leq \frac{1}{n!}.$$

d. En déduire que $f_n(0) \leq f_n(1)$.

2. En utilisant les variations de la fonction g_n définie sur $[0;1]$ par $g_n(x) = f_n(x) - \frac{x}{n!}$, montrer que

$$f_n(1) \leq f_n(0) + \frac{1}{n!}.$$

3. Soit (v_n) la suite définie par

$$v_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

a. Montrer à l'aide des questions **1** et **2** que si $n \geq 1$,

$$e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leq v_n \leq e.$$

b. En déduire que $0 \leq e - v_n \leq \frac{3}{n!}$.

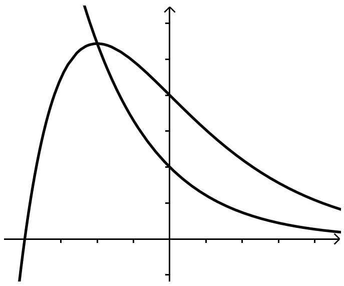
c. Déterminer la limite de (v_n).

d. Justifier que v_{14} est une valeur approchée à 10^{-10} de e. Écrire et programmer un algorithme permettant de calculer v_{14}.

34 (Une suite convergeant vers e)

1. Montrer l'inégalité $1 + x \leq e^x$ valable pour $x \in \mathbb{R}$.
2. En effectuant le changement de variable $X = -x$, en déduire que $e^X \leq \frac{1}{1-X}$ pour tout $X < 1$.
3. En déduire que pour entier $n \geq 1$ on a
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
4. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
   - **a.** Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq e - u_n \leq \frac{e}{n}$.
   - **b.** En déduire la limite de (u_n).

35 On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels par $f_k(x) = (x+k)e^{-x}$, où k est un réel fixé.
On note C_k la courbe de f_k dans un repère orthogonal.



1. Montrer que f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.
2. On note M_k le point de la courbe C_k d'abscisse $1-k$. Montrer que M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.
3. Sur le graphique ci-dessus, le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
   - la courbe Γ ;
   - la courbe C_k pour un certain k.

   - **a.** Identifier les courbes.
   - **b.** En expliquant la démarche, déterminer k ainsi que l'unité sur chaque axe.

36 On considère les courbes C_1 et C_2 d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe une unique tangente commune à ces deux courbes.

1. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point de C_1 d'abscisse a et par B le point de C_2 d'abscisse b.
   - **a.** Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe C_1 au point A, puis de la tangente T_B à la courbe C_2 au point B.
   - **b.** En déduire que ces droites sont confondues si et seulement si
$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}.$$
   - **c.** Montrer que ce système équivaut à
$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}.$$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4.$$
On va montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.
   - **a.** Montrer que pour $x < 0$, on a $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$. En déduire que l'équation n'a pas de solution sur $]-\infty; 0[$.
   - **b.** Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
   - **c.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[0; +\infty[$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.
3. On prend pour A le point d'abscisse a. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites T_A et T_B sont confondues.

37 (Constante Ω) Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation $e^x = \frac{1}{x}$ (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et de construire une suite convergeant vers cette unique solution.

Partie A – Existence et unicité de la solution

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Montrer que (E) $\Leftrightarrow f(x) = 0$.
2. **a.** Étudier les variations de f.
   - **b.** En déduire que (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
   - **c.** Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
   - **d.** Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

Partie B – Un algorithme pour trouver une valeur approchée de α

Compléter l'algorithme de dichotomie suivant pour déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de α.
Le programmer et déterminer cet encadrement.

Variables	a, b, m sont des réels ε est un réel positif
Initialisation	a prend la valeur 0,5 b prend la valeur 1
Traitement	Tant que . . . . . m prend la valeur $\frac{a+b}{2}$ Si . . . . a prend la valeur . . . Sinon b prend la valeur . . . Fin Si Fin tant que
Sortie	Afficher . .

Partie C – Une fonction ayant α pour point fixe

On note g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. **a.** Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(\alpha) = 0$.
   - **b.** Montrer que g est croissante sur $[0; \alpha]$.
   - **c.** Soit $h(x) = (x-1)e^x - x - 3$. Montrer que
$$g''(x) = \frac{e^x h(x)}{(e^x+1)^3}.$$
   - **d.** Montrer que si $x \in [0; 1]$, alors $h(x) \leq 0$.
   - **e.** En déduire que $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{4}$ si $x \in [0; \alpha]$.
3. On pose $k(x) = g(\alpha) - g(x) - \frac{1}{4}(\alpha - x)$.
   - **a.** Étudier les variations de k sur $[0; \alpha]$ et en déduire le signe de k sur $[0; \alpha]$.
   - **b.** Montrer que pour tout $x \in [0; \alpha]$,
$$0 \leq g(\alpha) - g(x) \leq \frac{1}{4}(\alpha - x).$$

Partie D – Construction d'une suite convergeant vers α

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Montrer que pour tout n, $u_n \in [0; \alpha]$.
2. Montrer en utilisant la partie B que
$$0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(\alpha - u_n).$$
3. En déduire par récurrence sur $n \geq 0$, $0 \leq \alpha - u_n \leq \frac{1}{4^n}$.
4. Déterminer la limite de (u_n).