Nombres complexes (partie II)

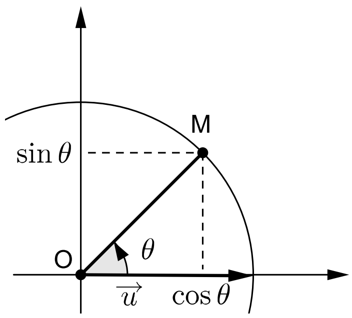
On se place dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ du plan, ou $(O; \vec{u}, \vec{v})$ si l'on pose $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{u}$.

1. Nombres complexes de module 1

❖ **Définition**

Soit z un nombre complexe de module 1. Son image M est un point du cercle trigonométrique et en désignant par θ une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$, le point M a pour coordonnées $(\cos\theta\,; \sin\theta)$, par conséquent $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Cette écriture s'appelle <u>forme trigonométrique</u> de z et θ est un <u>argument</u> de z, noté $\arg z$.
Inversement pour tout réel θ, le complexe $\cos\theta + i\sin\theta$ a pour module 1 car

$$|\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1.$$



Notation. *Pour* $\theta \in \mathbb{R}$, *on pose* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. *Ainsi* $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ *et* $\arg e^{i\theta} = \theta$.

L'écriture $z = e^{i\theta}$ est appelée <u>forme exponentielle</u> de z.

Voici quelques exemples. Les formes exponentielles de i et -1 sont à connaître.

Forme algébrique	$\arg z$	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
1	$0, 2\pi, -2\pi, \ldots$	$\cos 0 + i\sin 0$	e^{i0}
i	$\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \ldots$	$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$	$e^{i\frac{\pi}{2}}$
-1	$\pi, 3\pi, -\pi, \ldots$	$\cos\pi + i\sin\pi$	$e^{i\pi}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$-\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \ldots$	$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$	$e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

❖ **Propriété fondamentale, justification de la notation exponentielle**

Théorème. Pour tous réels θ et θ', on a $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

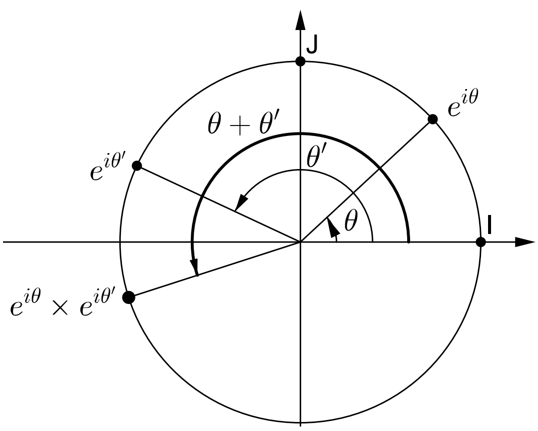
Démonstration. On a

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ &\quad + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \end{aligned}$$

puis d'après les formules d'addition du cosinus et du sinus,

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta').$$

Donc par définition de la notation exponentielle, on peut écrire $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, analogue à $e^x e^y = e^{x+y}$. ■



Cela signifie que si l'on multiplie deux nombres complexes, leurs arguments s'ajoutent.

Corollaire. Pour tous réels θ et θ',
1. $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
2. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
3. $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$ pour tout entier relatif n.
4. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Démonstration.
1. On peut écrire d'après le théorème $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^{i0} = 1$, d'où $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
2. D'après la propriété précédente,
$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times \frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta}e^{-i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}.$$
3. On commence par démontrer la propriété par récurrence sur $n \geq 0$. Ensuite si $n < 0$, on applique ce qui vient d'être prouvé à $p = -n \geq 0$, car grâce à la propriété **1.**, on peut écrire
$$\left(e^{i\theta}\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^{-p} = \frac{1}{\left(e^{i\theta}\right)^p} = \frac{1}{e^{ip\theta}} = \frac{1}{e^{-in\theta}} = e^{in\theta}.$$
4. $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$.

❖ Applications

Exemple

Soit les nombres complexes $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Posons $Z = z_1z_2$.
D'une part
$$Z = e^{i\frac{\pi}{3}-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}.$$
D'autre part
$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$
et
$$z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
Ce qui permet d'écrire
$$Z = \frac{1}{4}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \sqrt{6}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$
donc par identification $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exemple

Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$. Calculons de deux façons $\left(e^{i\theta}\right)^2$.
- d'une part $\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$
- d'autre part $\left(e^{i\theta}\right)^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta + (i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta$.

Par identification $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$.

En remplaçant θ par $-\theta$ dans la définition de $e^{i\theta}$, on a $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$. En ajoutant et en retranchant cette égalité à $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, on obtient le théorème suivant.

Théorème (formules d'Euler). Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \text{ et } e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

ou encore

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exemple

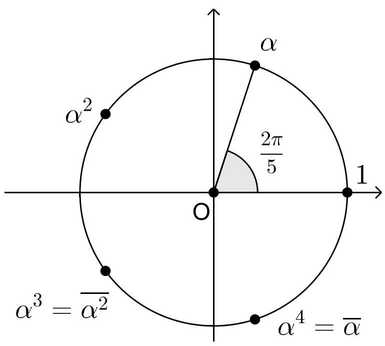
Transformons l'expression $\cos^2\theta\sin\theta$ grâce aux formules d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos^2\theta\sin\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) = \frac{1}{8i}\left(e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta}-e^{i\theta}+2e^{i\theta}-2e^{-i\theta}+e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}+e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{8i}(2i\sin 3\theta + 2i\sin\theta)\\ &= \frac{1}{4}(\sin 3\theta + \sin\theta).\end{aligned}$$

Exemple (difficile)

Voici une méthode permettant de calculer la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Posons $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Remarquons que :



- $\alpha^3 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\left(\frac{6\pi}{5}-2\pi\right)} = e^{-i\frac{4\pi}{5}} = \overline{\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2} = \overline{\alpha^2}$
- $\alpha^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\left(\frac{8\pi}{5}-2\pi\right)} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \bar{\alpha}$
- $\alpha^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = e^{2i\pi} = 1$
- $\alpha^6 = \alpha^5 \times \alpha = 1 \times \alpha = \alpha$
- $\alpha^7 = \alpha^5 \times \alpha^2 = 1 \times \alpha^2 = \alpha^2$
- $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$ est la somme 5 de termes consécutifs de la suite de la suite géométrique de raison α et de premier terme 1, par conséquent cette somme vaut $\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha} = 0$, et donc $\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 = -1$.

Posons $A = \alpha+\alpha^4$ et $B = \alpha^2+\alpha^3$. On a $A+B = \alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 = -1$ et

$$AB = (\alpha+\alpha^4)(\alpha^2+\alpha^3) = \alpha^3+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7 = \alpha^3+\alpha^4+\alpha+\alpha^2 = -1.$$

Soit Z une variable complexe. On peut écrire en développant :

$$(Z-A)(Z-B) = Z^2-(A+B)Z+AB = Z^2+Z-1.$$

Pour $Z = A$ ou $Z = B$, l'expression $(Z-A)(Z-B)$ est nulle, ce qui prouve que A et B sont racines de l'équation $Z^2+Z-1 = 0$. Ces racines sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$.

Mais $A = \alpha+\alpha^4 = \alpha+\bar{\alpha} = 2\,\mathrm{Re}(\alpha) = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $B = \alpha^2+\overline{\alpha^2} = 2\,\mathrm{Re}(\alpha^2) = 2\cos\frac{4\pi}{5}$ et comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, la décroissance du cosinus sur $[0;\pi]$ montre que l'on a $\cos\frac{4\pi}{5} < 0 < \cos\frac{2\pi}{5}$, d'où $B < 0 < A$. Ceci permet de conclure que $A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $B = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, d'où finalement les valeurs remarquables suivantes :

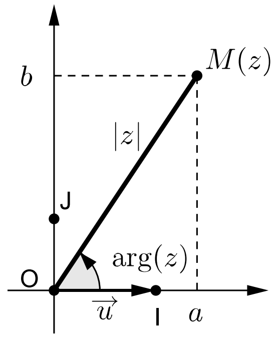
$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ et } \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

2. Forme trigonométrique et exponentielle

Soit z un nombre complexe non nul. Le nombre complexe $z' = \frac{z}{|z|}$ a pour module 1, par conséquent il existe θ tel que $z' = e^{i\theta}$, d'où $z = |z|e^{i\theta}$, ou encore $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Théorème-définition. Soit z un nombre complexe non nul. Il existe deux réels $r > 0$ et θ tel que

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

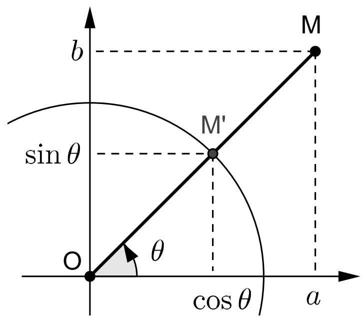


De plus :
- r est unique et $r = |z|$;
- θ est unique à $2k\pi$ près, c'est-à-dire que si θ est l'un des réels vérifiant la condition du théorème, alors pour tout autre réel θ' vérifiant cette condition, il existe un entier relatif k tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$. Un tel réel θ est appelé <u>argument</u> de z et est noté $\arg(z)$. Si M est le point d'affixe z, on a $\arg z = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

On dit que $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la <u>forme trigonométrique</u> de z et $|z|e^{i\theta}$ est sa <u>forme exponentielle</u>.

Démonstration.
L'existence a été prouvée ci-dessus.
Démontrons l'unicité en supposant qu'il existe r et r' deux réels strictement positifs et θ et θ' deux réels tels que

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta').$$



En identifiant parties réelle et imaginaires, on obtient le système

$$\begin{cases} r\cos\theta = r'\cos\theta' \\ r\sin\theta = r'\sin\theta' \end{cases} \quad (*)$$

Élevons ces égalités au carré et ajoutons-les membre à membre, on obtient :

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r'^2(\cos^2\theta' + \sin^2\theta').$$

Comme pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on en déduit $r^2 = r'^2$ puis $r = r'$ car ces deux réels sont positifs. Ceci prouve l'unicité de r. De la partie « existence », on déduit donc que $r = |z|$.
Par suite puisque $r \neq 0$, le système $(*)$ donne

$$\begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases}$$

ce qui prouve que $\theta = \theta' + 2k\pi$ pour un entier relatif k. ■

Pour déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe, il suffit donc de l'écrire sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec <u>$r > 0$</u>. Alors $|z| = r$ et $\arg z = \theta$.

<u>Exemple</u>
- La forme trigonométrique de 5 est $5(\cos 0 + i\sin 0)$, sa forme exponentielle est $5e^{i0}$.
- La forme trigonométrique de -2 est $2(\cos\pi + i\sin\pi)$ et sa forme exponentielle est $2e^{i\pi}$.
- Soit $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$. La forme trigonométrique de z est
$$3\left(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right) = 3\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)\right) = 3\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$$

donc $\arg z = \frac{6\pi}{7}$. Sa forme exponentielle est $e^{i\frac{6\pi}{7}}$.
La bonne connaissance de la forme exponentielle permet de s'affranchir des formules de trigonométrie. Ici

$$-3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right) = -3\overline{e^{i\frac{\pi}{7}}} = e^{i\pi} \times 3 \times e^{-i\frac{\pi}{7}} = 3e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)} = e^{i\frac{6\pi}{7}}.$$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. On a alors $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right)$ donc par identification $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$. On détermine ensuite θ à l'aide des valeurs remarquables de sinus ou cosinus, ou bien à l'aide d'une calculatrice.

Exemple

- Déterminons la forme trigonométrique de $z = 1 - i$. On a $|z| = \sqrt{2}$, donc
$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
Par suite $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ainsi $\theta = -\frac{\pi}{4}$ et finalement la forme trigonométrique de $1 + i$ est $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, sa forme exponentielle est $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
On peut alors facilement calculer des puissances, par exemple
$$(1+i)^{10} = z^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{-i\frac{10\pi}{4}} = 2^5 e^{-i\frac{5\pi}{2}} = 32e^{-i\frac{\pi}{2}} = -32i.$$
- Déterminons la forme trigonométrique de $z = 3 - 2i$.
On a $|z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$, donc $z = \sqrt{13}\left(\frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}}i\right)$, un argument θ de z vérifie les égalités
$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ et } \sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}.$$
La calculatrice renvoie $\arccos\frac{3}{\sqrt{13}} \approx 33{,}7°$, d'où l'on déduit que $\theta \approx \pm 33{,}7°$. Mais comme $\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}} < 0$, on conclut que $\arg(z) \approx -33{,}7°$.

Remarque. Pour tout nombre complexe non nul z, on a
- z est un réel positif si et seulement si $\arg z = 0$;
- z est un réel négatif si et seulement si $\arg z = \pi$.

3. Propriétés des arguments

Des propriétés des complexes de module 1, on déduit les résultats suivants sur les arguments et on redémontre en même temps les propriétés des modules.

Théorème. Pour tous nombres complexes non nuls z et z',
1. $\arg zz' = \arg z + \arg z'$
2. Pour tout entier relatif n, on a $\arg(z^n) = n\arg z$
3. $\arg\frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$ (en particulier $\arg\frac{1}{z} = -\arg z$)
4. $\arg\bar{z} = -\arg z$
5. $\arg(-z) = \pi + \arg z$

Démonstration.
Écrivons z et z' sous forme exponentielle : $z = |z|e^{i\theta}$ et $z' = |z'|e^{i\theta'}$.

1. La forme exponentielle de zz' est
$$zz' = |z||z'|e^{i\theta}e^{i\theta'} = \underbrace{|z||z'|}_{\geq 0}\, e^{i(\theta+\theta')}.$$
On constate donc que le module de zz' est $|z||z'|$ et qu'un argument de zz' est $\theta + \theta' = \arg z + \arg z'$.
2. On a $z^n = \left(|z|e^{i\theta}\right)^n = |z|^n\left(e^{i\theta}\right)^n = \underbrace{|z|^n}_{\geq 0}\, e^{in\theta}$, d'où l'on déduit que $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\theta = n \arg z$.
3. La forme exponentielle de $\frac{z}{z'}$ est
$$\frac{z}{z'} = \frac{|z|e^{i\theta}}{|z'|e^{i\theta'}} = \frac{|z|}{|z'|} \times \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \frac{|z|}{|z'|}e^{i(\theta-\theta')},$$
ce qui montre que $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\frac{z}{z'} = \theta - \theta' = \arg z - \arg z'$.
4. D'après les propriétés du conjugué $\bar{z} = \overline{\underbrace{|z|}_{\in\mathbb{R}}} \times \overline{e^{i\theta}} = |z|e^{-i\theta}$, par conséquent $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg \bar{z} = -\theta = -\arg z$
5. On peut écrire $-z = -|z|e^{i\theta} = e^{i\pi}|z|e^{i\theta} = |z|e^{i(\theta+\pi)}$, donc
$$\arg(-z) = \pi + \theta = \pi + \arg z.\ ■$$

4. Retour sur la géométrie

Exemple

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = 3$.

Réponse. Soit A le point d'affixe $2i$. Alors $|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow |z - z_A| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$, donc l'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 3.

On procéder algébriquement : en appelant $x + iy$ la forme algébrique de z, on a
$$|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow |x + (y-2)i|^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 9,$$
Ce qui montre que l'ensemble est le cercle de centre $A(0;2)$ et de rayon $\sqrt{9} = 3$.

On se place dans un repère orthonormé du plan $(O;\vec{u},\vec{v})$. On rappelle qu'on désigne par $z_{\vec{u}}$ l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$ et z_A l'affixe d'un point A.

Théorème.
1. Pour tous points distincts A et B, on a $|z_B - z_A| = AB$ et $\arg(z_B - z_A) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$.
2. Pour tous points A, B, C, D avec $A \neq B$ et $C \neq D$, on a
$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{CD}{AB} \text{ et } \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right).$$

Démonstration. Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Alors M a pour affixe $z_B - z_A$. Comme $OM = AB$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$ on a $|z_A - z_B| = AB$ et $\arg(z_B - z_A) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$.
Il est alors clair que $\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \frac{CD}{AB}$ et $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$. ■

Exemple

On considère les points A, B, C d'affixe respective

$$z_A = -1 + 2i, z_B = 3 + i \text{ et } z_C = 2 - 3i.$$

On a $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-1-4i}{-4+i} = i$, donc $\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1$, d'où $\left|\frac{CB}{AB}\right| = 1$, soit $AB = BC$, et aussi $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg i = \frac{\pi}{2}$. Ainsi ABC est isocèle rectangle en B.

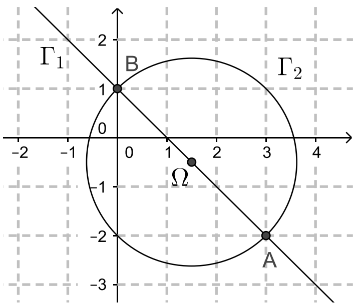
❖ Rappels sur les ensembles de points

1. Étant donné un point A et un réel $r \geq 0$, l'ensemble des points M tels que $MA = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.
2. Étant donné deux points distincts A et B, l'ensemble des points M tels que $MA = MB$ et la médiatrice du segment $[AB]$.
3. Étant donné deux points distincts A et B, l'ensemble des points M tels que
   - $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi]$ est la droite (AB) privé de A et B ;
   - $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi\ [2\pi]$ est le segment $[AB]$ privé de A et B ;
   - $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

Exemple

Pour $z \neq i$, posons $z' = \frac{z-3+2i}{z-i}$. Déterminons l'ensemble

- Γ_1 des points d'affixe z tels que z' soit réel ;
- Γ_2 des points d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.



Méthode algébrique. Soit $z = x + iy$ la forme algébrique de z, avec $(x, y) \neq (0,1)$ puisque $z \neq i$. Après quelques calculs pénibles on trouve que la forme algébrique de z' est

$$z' = \frac{x^2 + y^2 - 3x + y - 2}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{3(x + y - 1)}{x^2 + (y-1)^2} i.$$

On en déduit que

- z' est réel si et seulement si $x + y - 1 = 0$ et $(x, y) \neq (0,1)$. L'ensemble Γ_1 est donc la droite d'équation $y = 1 - x$ privée du point B de coordonnées $(0; 1)$
- z' est un imaginaire pur si et seulement si $x^2 + y^2 - 3x + y - 2 = 0$ et et $(x, y) \neq (0,1)$, ou encore si et seulement si
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \text{ et } (x, y) \neq (0,1).$$
L'ensemble Γ_2 est donc le cercle de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, de rayon $\frac{3}{\sqrt{2}}$, privé de B.

Méthode géométrique. Soit A d'affixe $3 - 2i$ et B d'affixe i. On a $z' = \frac{z - z_A}{z - z_B}$, si bien que pour $z \neq z_A$ et $z \neq z_B$, on a $\arg z' = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$. Par suite :

- Pour $z \neq z_A$ et $z \neq z_B$, z'est réel si et seulement si $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 0\ [\pi]$, c'est-à-dire si et seulement si M appartient à la droite (AB) privée de A et B. Par ailleurs il est clair que $A \in \Gamma_1$ car $z'_A = 0$ est réel. Finalement Γ_1 est la droite (AB) privée de B.
- Pour $z \neq z_A$ et $z \neq z_B$, z'est imaginaire pur si et seulement si $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, c'est-à-dire si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B. Par ailleurs il est clair que $A \in \Gamma_2$ car $z'_A = 0$ est un imaginaire pur. Finalement Γ_2 est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B.

Il est facile de vérifier que les ensembles trouvés sont bien les mêmes.