Nombres complexes (partie II) – Exercices

Complexes de module 1

1 Donner la forme algébrique des nombres suivants.

a. $e^{i\pi}$ **b.** $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ **c.** $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2 Donner le module des nombres complexes suivants.

a. $e^{i\frac{\pi}{2}}$ **b.** $3e^{i\frac{5\pi}{3}}$ **c.** $-4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

3 Écrire sous forme exponentielle les nombres suivants.

a. $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5$ **b.** $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}$ **c.** $\dfrac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}$

4 On considère le nombre complexe $z = 2e^{i\frac{\pi}{7}}$.
Montrer que z^{1799} est un entier et préciser son signe.

5 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la forme exponentielle des solutions de l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)\, z + 1 = 0$.

6 Vrai ou faux ? Justifier.

a. $\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{i\theta^2}$ **b.** $\arg(ie^{i\theta}) = \theta + \frac{\pi}{2}$

7 Soit $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
Calculer la forme exponentielle des nombres suivants.

$$\frac{1}{z_1},\ z_1 z_2^6,\ \frac{z_2^2}{z_1},\ \overline{z_1},\ iz_2 \text{ et } \overline{z_2}^4.$$

8 Soit θ un réel.

1. En calculant $e^{3i\theta}$ de deux façons différentes, exprimer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

2. En déduire les formules $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ et $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

9 Soit deux complexes z_1 et z_2 de module 1. Montrer que $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif.

10 Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$; on pose $\alpha = z + z^2 + z^4$.

1. Montrer que $\alpha + \bar{\alpha} = -1$ et $\alpha\bar{\alpha} = 2$.

2. Montrer que α et $\bar{\alpha}$ sont solutions de $Z^2 + Z + 2 = 0$.

3. En déduire les formules

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

et

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

4. Montrer que $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}$.

11 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad\text{et}\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

1. Montrer que pour tout réel α

$$1 - e^{i\alpha} = -2i\sin\frac{\alpha}{2}\, e^{i\frac{\alpha}{2}}.$$

2. On pose $a = e^{ix}$.

a. Justifier que $C_n + iS_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

b. En déduire

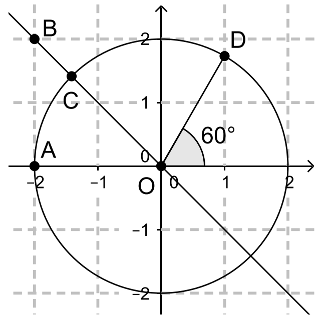
$$C_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{nx}{2} \text{ et } S_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}.$$

c. Déduire de ce qui précède pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n} = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

Forme trigonométrique et exponentielle

12 Donner les formes algébriques, exponentielles et trigonométriques des affixes des points A, B, C, D de la figure ci-contre.



13 Parmi les formes suivantes, lesquelles sont trigonométriques ?

a. $5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b. $\left(\sqrt{2}-1\right)(\cos 5 + i\sin 5)$

c. $-2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$

d. $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

14 Donner les formes exponentielles des complexes suivants, préciser leur module et argument.

$a = 2017$ $b = -\frac{4}{3}$ $c = 3i$

$d = 3 - \pi$ $e = \left(1-\sqrt{2}\right)i$ $f = 189\pi$

15 Même consigne.

$a = -2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ $b = \frac{1}{3}\left(2\cos\frac{\pi}{5} - 2i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$c = -3\left(\cos\frac{\pi}{10} - i\sin\frac{\pi}{10}\right)$ $d = \sin\frac{\pi}{9} + i\cos\frac{\pi}{9}$

16 Écrire sous forme algébrique les sept nombres suivants dont on donne le module et un argument.

$\lvert z\rvert$	2	3	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}$	4
$\arg z$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$

17 Donner les formes trigonométriques et exponentielles des complexes suivants, préciser leur module et argument.

$a = 1 - i$ $b = -\sqrt{3} + i$

$c = 1 + i$ $d = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$

$e = 4i - 4$ $f = -2e^{i\frac{\pi}{5}}$

Propriété des arguments

18 Soit z_1 et z_2 des nombres complexes tels que

$$\arg z_1 = \frac{\pi}{7} \text{ et } \arg z_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

Donner un argument de

1. z_1^2, z_2^2, z_1^{1515}, z_2^{1515}, z_1^{2019} et z_2^{2019}.

2. $\frac{1}{z_1}$, $z_1 z_2^6$, $\frac{z_2^2}{z_1}$, $\overline{z_1}$, iz_2, $\overline{z_2}^4$ et $-\frac{2z_1}{\overline{z_2}^4}$.

19 Déterminer un argument de

a. $(-1+i)\left(-\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right)^3$

b. $-2i\left(1 + i\sqrt{3}\right)^6$

20 En utilisant l'écriture exponentielle, déterminer l'écriture algébrique de

a. $(2+2i)^6$ **b.** $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$ **c.** $\frac{2+2i}{\left(3-3i\sqrt{3}\right)^3}$

d. $\frac{1}{(i-1)^{12}}$ **e.** $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{16}$ **f.** $\frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}$

Longueurs et angles

21 Soit A, B, C les points d'affixe respectives
$$z_A = -1 - i,\ z_B = 2 - 2i \text{ et } z_C = 1 + 5i.$$
1. **a.** Calculer sous forme algébrique : $z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
b. En déduire un argument de z.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

22 Soit A et B les points d'affixe respectives
$$z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \text{ et } z_B = e^{-\frac{i\pi}{3}} z_A.$$
Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

23 Soit A, B, C, D les points d'affixe respectives
$z_A = -2 - 5i$, $z_B = 3$, $z_C = 4 + 7i$, $z_D = -1 + 2i$.
1. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Démontrer que $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}$ est un imaginaire pur et en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

24 On considère pour tout $\theta \in [0; 2\pi[$ le point M d'affixe $z = e^{i\theta}$. On désigne par S le point d'affixe $1 + z + z^2$.
Démontrer O, M et S sont alignés.

25 On note A et M les points d'affixes respectives 2 et z. Pour tout $z \neq 2$, on considère $z' = \frac{z}{z-2}$ et le point M' d'affixe z'.
On cherche à déterminer les ensembles suivants :
- E l'ensemble des points M tels que z' soit réel ;
- E^* l'ensemble des points M tels que z' soit réel non nul ;
- F l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur ;
- F^* l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur non nul ;
- G l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.

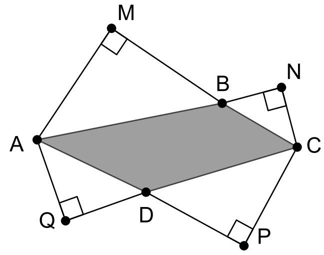
A – Méthode algébrique
On pose $z = x + iy$ avec x et y réels, et $z' = x' + iy'$ avec x' et y' réels.
1. Montrer que $x' = \frac{x^2+y^2-2x}{(x-2)^2+y^2}$ et $y' = \frac{-2y}{(x-2)^2+y^2}$.
2. Déterminer E puis F.

B – Méthode géométrique
3. Interpréter géométriquement le module de z' et en déduire l'ensemble G.
4. Interpréter géométriquement un argument de z'.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que z' soit réel non nul. En déduire E^* puis E.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que z' soit imaginaire pur non nul. En déduire F^* puis F.

C – Utilisation du conjugué
7. Montrer que z' est réel si et seulement si $z = \bar{z}$. En déduire E.
8. Montrer que M' appartient à F si et seulement si $2|z|^2 = 4\,\mathrm{Re}(z)$. En déduire une équation de F puis F^*.

26 Au point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z})$. Vrai ou faux ? Justifier.
a. Le point M' appartient à la droite (OA), A étant le point d'affixe $1 + i$.
b. Pour tout point M du plan, les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.
c. L'ensemble des points M du plan tel que $M = M'$ est l'axe des abscisses.
On note M_1 le point d'affixe z, M_2 le point d'affixe $\bar{z}$ et M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ soit un parallélogramme.
d. $OM_1M_2M_3$ est un losange.

27 Dans la figure ci-dessous, le quadrilatère $ABCD$ est quelconque et les triangles MAB, NBC, PCD, QDA sont rectangles isocèles de sens direct.



On se place dans un repère quelconque $(O; \vec{u}, \vec{v})$ du plan, et on désigne par a, b, … les affixes de A, B, …
1. Montrer que $\frac{b-m}{a-m} = i$ puis exprimer m en fonction de a et b.
2. Exprimer n, p, q en fonction de a, b, c, d.
3. Conclure que $MP = NQ$ et $(MP) \perp (NQ)$.

28 Démontrer que les points M_1 et M_2 d'affixe z_1 et z_2 et O sont alignés si et seulement si $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}$.
Application. À tout point M d'affixe $x + iy$ on associe le point M_1 d'affixe $(1+i)\bar{z} - 2$ et le point M_2 d'affixe $i\bar{z} + 2 + i$.
1. Montrer que les points O, M_1 et M_2 sont alignés si et seulement si M appartient à l'ensemble E tel que
$$x^2 + y^2 - 3x + 3y - 2 = 0.$$
2. Déterminer la nature de E.

Sujets de baccalauréat

29 *(2016, Nouvelle-Calédonie).* QCM dans lequel une seule réponse est exacte.

1. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z
$$z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0,$$
où a désigne un nombre réel quelconque.
a. Pour toute valeur de a, (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.
b. Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts.
c. Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.
d. Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.

2. Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0; \pi[$ et z le nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$.
Pour tout réel θ dans l'intervalle $]0; \pi[$:
a. Le nombre z est un réel positif.
b. Le nombre z est égal à 1.
c. Un argument de z est θ.
d. Un argument de z est $\frac{\theta}{2}$

30 *(2016, Nouvelle-Calédonie).* On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :
$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$
On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.
1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
a. Déterminer la forme exponentielle de a.

b. Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.

2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

3. Soit M un point d'affixe z du cercle C de centre O et de rayon 1.

a. Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.

b. Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.

4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

31 *(2008, Amérique du Nord).* Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 4 cm (ou 4 carreaux).
On considère le point A d'affixe $z_A = 2 + i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.

2. a. Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O;\vec{u})$.

b. On désigne par B et C les points d'affixes $z_B = 1$ et $z_C = 3$.
Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ).

3. Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$.

a. Calculer le nombre complexe $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

b. Interpréter géométriquement un argument du nombre $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ).

32 *(2014, centres étrangers).* On définit, pour tout entier naturel n, la suite de nombres complexes (z_n) définie par : $z_0 = 16$ et $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}\, z_n$ pour $n \geq 0$.
On note r_n le module du nombre complexe : $r_n = |z_n|$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixe z_n.

1. a. Calculer z_1, z_2, z_3.

b. Reproduit le le graphique ci-dessous et placer les points A_1 et A_2.

c. Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.

d. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

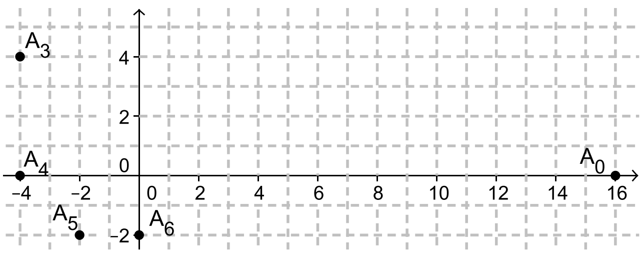
2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La suite (r_n) est-elle convergente?
Interpréter géométriquement le résultat précédent.

3. On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$A_nA_{n+1} = r_{n+1}.$$

b. Donner une expression de L_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).



33 *(2015, Amérique du Nord).* On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n; y_n)$ de la façon suivante :
$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8x_n - 0{,}6y_n \\ y_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}8y_n \end{cases}$.

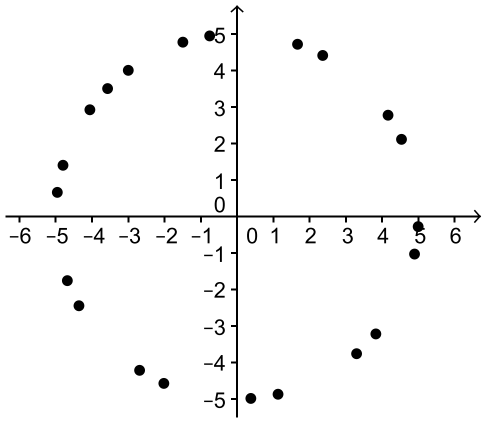
1. a. Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1, A_2.

b. Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

```
x ← −3
y ← 4
Pour i allant de 0 à 20
Construire le point de coordonnées (x; y)
  t ← x
  x ← …
  y ← …
Fin Pour
```

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

c. À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0, A_1 et A_2. On les nommera sur la figure.
Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.
Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point A_n.

a. Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b. On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos\theta = 0{,}8$ et $\sin\theta = 0{,}6$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.

c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = e^{in\theta} z_0$.

d. Montrer que $\theta + \frac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

e. Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.
Représenter θ sur la figure.
Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

34 *(2013, Nouvelle-Calédonie).* QCM. Une seule réponse est exacte.
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit z un nombre complexe de la forme $x + iy$, où x et y sont des réels.

1. Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+i)^4$. L'écriture exponentielle de z est :
   a. $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ **b.** $\sqrt{2}e^{i\pi}$ **c.** $4e^{i\pi}$ **d.** $4e^{\frac{i\pi}{4}}$
2. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z=x+iy$ tels que $|z-1+i|=|\sqrt{3}-i|$ a pour équation :
   a. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$
   b. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$
   c. $(x-1)^2+(y+1)^2=4$
   d. $y=x+\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
3. On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0=1+i$ et $Z_{n+1}=\frac{1+i}{2}Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n.
   a. Pour tout entier naturel n, le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
   b. Pour tout entier naturel n, le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.
   c. La suite (U_n) définie par $U_n=|Z_n|$ est convergente.
   d. Pour tout entier n, un argument de $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $\frac{\pi}{2}$.
4. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives : $Z_A=-1-i$, $Z_B=2-2i$, $Z_C=1+5i$. On pose $Z=\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$
   a. Z est un nombre réel.
   b. Le triangle ABC est isocèle en A.
   c. Le triangle ABC est rectangle en A.
   d. Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.

35 *(2013, Amérique du Sud).* Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E):\ z^2-2\sqrt{3}z+4=0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
2. On considère la suite (M_n) des points ayant pour affixes $z_n=2^n e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}}$, définie pour $n\geq 1$.
   a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   b. Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   c. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans un repère adapté et tracer les segments $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$, on a
$$z_n=2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n i}{2}\right).$$
4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.
   Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n\geq 1$, $M_nM_{n+1}=2^n\sqrt{3}$.
5. On note $\ell_n=M_1M_2+M_2M_3+\cdots+M_nM_{n+1}$.
   a. Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$,
$$\ell_n=2\sqrt{3}(2^n-1).$$
   b. Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n\geq 1000$.

36 *(2006, métropole).* Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où x, x', y, y' sont des nombres réels.
1. Montrer que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{Re}(z'\bar{z})=0$.
2. Montrer que O, M, M' sont alignés si et seulement si $\mathrm{Im}(z'\bar{z})=0$.

Applications

3. N est le point d'affixe z^2-1. Quel est l'ensemble des points M tels $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?
4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\frac{1}{z^2}-1$. On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.
   a. Montrer que $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\bar{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$.
   b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

37 *(2007, Amérique du Sud).* Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.
1. Soit E le point d'affixe $z_E=-i$. Déterminer l'affixe du point E', image de E par f.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M'=M$.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit M un point distinct des points O, A et B.
   a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.
   b. En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'A};\overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)$.
4. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.
5. Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.
   a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).
   b. Tout point de (AB) a-t-il un antécédent par f ?

38 *(2015, Asie).* Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On pose $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A – Propriétés du nombre j
1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2+z+1=0.$$
   b. Vérifier que j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument de j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   a. $j^3=1$;
   b. $j^2=-1-j$.
4. On note P, Q, R les images respectives de 1, j et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B – Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a+jb+j^2c=0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.
1. En utilisant la question **A-3.b.**, démontrer l'égalité :
$$a-c=j(c-b).$$
2. En déduire que $AC=BC$.
3. Démontrer l'égalité : $a-b=j^2(b-c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.