

Nombres complexes (partie II) – Exercices

Complexes de module 1, forme exponentielle

- 1** Donner la forme algébrique des nombres suivants.
 a. $e^{i\pi}$ b. $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ c. $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
- 2** Donner le module des nombres complexes suivants.
 a. $e^{i\frac{\pi}{2}}$ b. $3e^{i\frac{5\pi}{3}}$ c. $-4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
- 3** Écrire sous forme exponentielle les nombres suivants.
 a. $(e^{i\frac{\pi}{4}})^5$ b. $\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}$ c. $\frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}$
- 4** On considère le nombre complexe $z = 2e^{i\frac{\pi}{7}}$.
 Montrer que z^{1799} est un entier et préciser son signe.
- 5** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la forme exponentielle des solutions de l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
- 6** Vrai ou faux ? Justifier.
 a. $(e^{i\theta})^2 = e^{i2\theta}$ b. $\arg(ie^{i\theta}) = \theta + \frac{\pi}{2}$
- 7** Soit $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
 Calculer la forme exponentielle des nombres suivants.
 $\frac{1}{z_1}, z_1 z_2^6, \frac{z_2^2}{z_1}, \bar{z}_1, iz_2$ et \bar{z}_2^4 .
- 8** Soit θ un réel.

- En calculant $e^{3i\theta}$ de deux façons différentes, exprimer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.
 - En déduire les formules $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ et $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$.
- 9** Soit deux complexes z_1 et z_2 de module 1. Montrer que $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif.

- 10** Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$; on pose $\alpha = z + z^2 + z^4$.
- Montrer que $\alpha + \bar{\alpha} = -1$ et $\alpha\bar{\alpha} = 2$.
 - Montrer que α et $\bar{\alpha}$ sont solutions de $Z^2 + Z + 2 = 0$.
 - En déduire les formules

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$
 et

$$\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$
4. Montrer que $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}$.

- 11** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on pose $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.
- Montrer que pour tout réel α

$$1 - e^{i\alpha} = -2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}.$$
 - On pose $a = e^{ix}$.

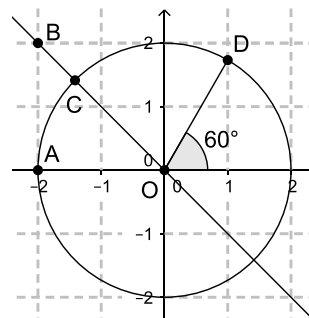
- Justifier que $C_n + iS_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.
- En déduire

$$C_n = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{nx}{2} \text{ et } S_n = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}.$$
- Déduire de ce qui précède pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n} = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}.$$

Forme trigonométrique

- 12** Donner les formes algébriques, exponentielles et trigonométriques des affixes des points A, B, C, D de la figure ci-contre.



- 13** Parmi les formes suivantes, lesquelles sont trigonométriques ?
 a. $5\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$
 b. $(\sqrt{2} - 1)(\cos 5 + i \sin 5)$
 c. $-2\left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}\right)$
 d. $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

- 14** Donner les formes trigonométriques des complexes suivants, préciser leur module et argument.

- 2017
- $-\frac{4}{3}$
- $3i$
- $3 - \pi$
- $(1 - \sqrt{2})i$
- 189π

- 15** Même consigne.

- $-2\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)$
- $\sin \frac{\pi}{9} + i \cos \frac{\pi}{9}$
- $\frac{1}{3}\left(2\cos \frac{\pi}{5} - 2i \sin \frac{\pi}{5}\right)$
- $-3\left(\cos \frac{\pi}{10} - i \sin \frac{\pi}{10}\right)$

- 16** Écrire sous forme algébrique les sept nombres suivants dont on donne le module et un argument.

$ z $	2	3	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}$	4
$\arg z$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$

- 17** Donner les formes trigonométriques et exponentielles des complexes suivants, préciser leur module et argument.

- $1 - i$
- $-\sqrt{3} + i$
- $1 + i$
- $-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$
- $4i - 4$
- $-2e^{i\frac{\pi}{5}}$

Propriété des arguments

- 18** Soit z_1 et z_2 des nombres complexes tels que $\arg z_1 = \frac{\pi}{7}$ et $\arg z_2 = \frac{3\pi}{4}$.

Donner un argument de

- $z_1^2, z_2^2, z_1^{1515}, z_2^{1515}, z_1^{2014}$ et z_2^{2014} .
- $\frac{1}{z_1}, z_1 z_2^6, \frac{z_2^2}{z_1}, \bar{z}_1, iz_2, \bar{z}_2^4$ et $-\frac{2z_1}{z_2^4}$.

- 19** Déterminer un argument de

- $(-1 + i)(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3$
- $-2i(1 + i\sqrt{3})^6$

- 20** En utilisant l'écriture trigonométrique, déterminer l'écriture algébrique de

- $(2 + 2i)^6$
- $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$
- $\frac{2+2i}{(3-3i\sqrt{3})^3}$
- $\frac{1}{(i-1)^{12}}$
- $(1 - i\sqrt{3})^{16}$
- $\frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^2}$

Longueurs et angles

21 Soit A, B, C les points d'affixe respectives
 $z_A = -1 - i, z_B = 2 - 2i$ et $z_C = 1 + 5i$.

1. a. Calculer sous forme algébrique : $z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
- b. En déduire un argument de z .
2. En déduire la nature du triangle ABC .

22 Soit A et B les points d'affixe respectives

$$z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ et } z_B = e^{-\frac{i\pi}{3}} z_A.$$

Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

23 Soit A, B, C, D les points d'affixe respectives
 $z_A = -2 - 5i, z_B = 3, z_C = 4 + 7i, z_D = -1 + 2i$.

1. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Démontrer que $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}$ est un imaginaire pur et en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

24 On considère pour tout $\theta \in [0; 2\pi[$ le point M d'affixe $z = e^{i\theta}$. On désigne par S le point d'affixe $1 + z + z^2$.
 Démontrer O, M et S sont alignés.

25 On note A et M les points d'affixes respectives 2 et z .
 Pour tout $z \neq 2$, on considère $z' = \frac{z}{z-2}$ et le point M' d'affixe z' .

On cherche à déterminer les ensembles suivants :

- E l'ensemble des points M tels que z' soit réel ;
- E^* l'ensemble des points M tels que z' soit réel non nul ;
- F l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur ;
- F^* l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur non nul ;
- G l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.

A – Méthode algébrique

On pose $z = x + iy$ avec x et y réels, et $z' = x' + iy'$ avec x' et y' réels.

1. Montrer que $x' = \frac{x^2 + y^2 - 2x}{(x-2)^2 + y^2}$ et $y' = \frac{-2y}{(x-2)^2 + y^2}$.
2. Déterminer E puis F .

B – Méthode géométrique

3. Interpréter géométriquement le module de z' et en déduire l'ensemble G .
4. Interpréter géométriquement un argument de z' .
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que z' soit réel non nul. En déduire E^* puis E .
6. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que z' soit imaginaire pur non nul. En déduire F^* puis F .

C – Utilisation du conjugué

7. Montrer que z' est réel si et seulement si $z = \bar{z}$. En déduire E .
8. Montrer que M' appartient à F si et seulement si $2|z|^2 = 4 \operatorname{Re}(z)$. En déduire une équation de F puis F .

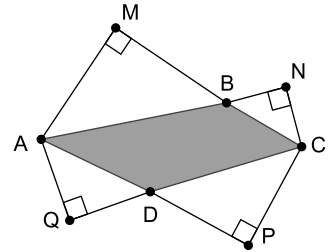
26 Au point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z})$. Vrai ou faux ? Justifier.

- a. Le point M' appartient à la droite (OA) , A étant le point d'affixe $1 + i$.
- b. Pour tout point M du plan, les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et \overrightarrow{OA} sont orthogonaux.
- c. L'ensemble des points M du plan tel que $M = M'$ est l'axe des abscisses.

On note M_1 le point d'affixe z , M_2 le point d'affixe \bar{z} et M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ soit un parallélogramme.

d. $OM_1M_2M_3$ est un losange.

27 Dans la figure ci-dessous, le quadrilatère $ABCD$ est quelconque et les triangles MAB, NBC, PCD, QDA sont rectangles isocèles de sens direct.



On se place dans un repère quelconque $(O; \vec{u}, \vec{v})$ du plan, et on désigne par a, b, \dots les affixes de A, B, \dots

1. Montrer que $\frac{b-m}{a-m} = i$ puis exprimer m en fonction de a et b .
2. Exprimer n, p, q en fonction de a, b, c, d .
3. Conclure que $MP = NQ$ et $(MP) \perp (NQ)$.

28 Démontrer que les points M_1 et M_2 d'affixe z_1 et z_2 et O sont alignés si et seulement si $z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}$.

Application. À tout point M d'affixe $x + iy$ on associe le point M_1 d'affixe $(1 + i)\bar{z} - 2$ et le point M_2 d'affixe $i\bar{z} + 2 + i$.

1. Montrer que les points O, M_1 et M_2 sont alignés si et seulement si M appartient à l'ensemble E tel que $x^2 + y^2 - 3x + 3y - 2 = 0$.
2. Déterminer la nature de E .

Sujets de baccalauréat

29 (2016, Nouvelle-Calédonie). QCM dans lequel une seule réponse est exacte.

1. On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe $z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$, où a désigne un nombre réel quelconque.
 - a. Pour toute valeur de a , (E) n'a pas de solution dans \mathbb{C} .
 - b. Pour toute valeur de a , les solutions de (E) dans \mathbb{C} ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts.
 - c. Pour toute valeur de a , les solutions de (E) dans \mathbb{C} ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.
 - d. Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.
2. Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0; \pi[$ et z le nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$.
 Pour tout réel θ dans l'intervalle $]0; \pi[$:
 - a. Le nombre z est un réel positif.
 - b. Le nombre z est égal à 1.
 - c. Un argument de z est θ .
 - d. Un argument de z est $\frac{\theta}{2}$.

30 (2016, Nouvelle-Calédonie). On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - a. Déterminer la forme exponentielle de a .

- b. Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.
3. Soit M un point d'affixe z du cercle C de centre O et de rayon 1.
- a. Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.
- b. Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.
4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

31 (2008, Amérique du Nord). Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 4 cm (ou 4 carreaux).

On considère le point A d'affixe $z_A = 2 + i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

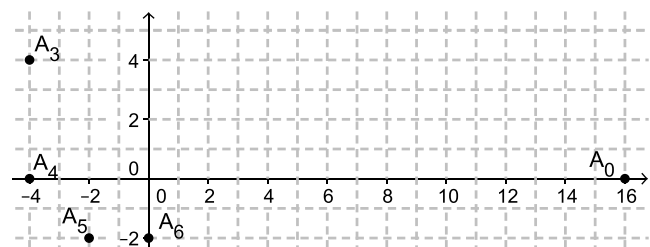
1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.
2. a. Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O; \vec{u})$.
- b. On désigne par B et C les points d'affixes $z_B = 1$ et $z_C = 3$. Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ) .
3. Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$.
- a. Calculer le nombre complexe $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.
- b. Interpréter géométriquement un argument du nombre $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ) .

32 (2014, centres étrangers). On définit, pour tout entier naturel n , la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$z_0 = 16 \text{ et } z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \text{ pour } n \geq 0.$$

On note r_n le module du nombre complexe : $r_n = |z_n|$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O , on considère les points A_n d'affixe z_n .

1. a. Calculer z_1, z_2, z_3 .
- b. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique ci-dessous.
- c. Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
- d. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .
2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La suite (r_n) est-elle convergente? Interpréter géométriquement le résultat précédent.
3. On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3 , etc.
- a. Démontrer que pour tout entier naturel n ,
- $$A_n A_{n+1} = r_{n+1}.$$
- b. Donner une expression de L_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n) .



33 (2015, Amérique du Nord). On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n , on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n; y_n)$ de la façon suivante :

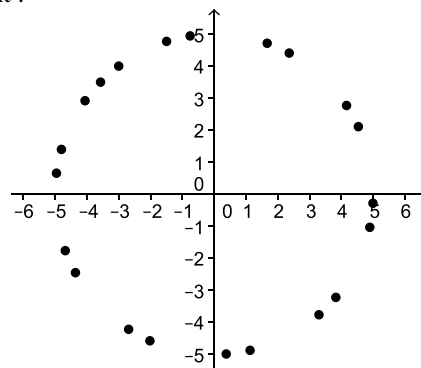
$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1. a. Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1, A_2 .
- b. Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

Variables	i, x, y, t : nombres réels
Initialisation	x prend la valeur -3 y prend la valeur 4
Traitement	Pour i allant de 0 à 20 Construire le point de coordonnées $(x; y)$ t prend la valeur x x prend la valeur \dots y prend la valeur \dots Fin Pour

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20} .

- c. À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0, A_1 et A_2 . On les nommera sur la figure.

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel. Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n , $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point A_n .
- a. Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?
- b. On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos \theta = 0,8$ et $\sin \theta = 0,6$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.
- c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = e^{in\theta} z_0$.
- d. Montrer que $\theta + \frac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0 .
- e. Pour tout entier naturel n , déterminer, en fonction de n et θ , un argument du nombre complexe z_n . Représenter θ sur la figure. Expliquer, pour tout entier naturel n , comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n .

34 (2013, Nouvelle-Calédonie). QCM. Une seule réponse est exacte.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit z un nombre complexe de la forme $x + iy$, où x et y sont des réels.

- Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+i)^4$. L'écriture exponentielle de z est :
 - $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$
 - $\sqrt{2}e^{i\pi}$
 - $4e^{i\pi}$
 - $4e^{\frac{i\pi}{4}}$
- L'ensemble des points M du plan d'affixe $z = x + iy$ tels que $|z - 1 + i| = |\sqrt{3} - i|$ a pour équation :
 - $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$
 - $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$
 - $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$
 - $y = x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
- On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0 = 1 + i$ et $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n .
 - Pour tout entier naturel n , le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
 - Pour tout entier naturel n , le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.
 - La suite (U_n) définie par $U_n = |Z_n|$ est convergente.
 - Pour tout entier n , un argument de $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $\frac{\pi}{2}$.
- Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives : $Z_A = -1 - i$, $Z_B = 2 - 2i$, $Z_C = 1 + 5i$. On pose $Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.
 - Z est un nombre réel.
 - Le triangle ABC est isocèle en A .
 - Le triangle ABC est rectangle en A .
 - Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.

35 (2013, Amérique du Sud). Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E) : z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$

- Résoudre l'équation (E) dans \mathbb{C} .
- On considère la suite (M_n) des points ayant pour affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.
 - Vérifier que z_1 est une solution de (E) .
 - Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
 - Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans un repère adapté et tracer les segments $[M_1M_2], [M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.
- Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right).$$
- Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3 .
Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.
- On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1}$.
 - Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\ell_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1).$$
 - Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geq 1000$.

36 (2010, centres étrangers). Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prend comme unité graphique 4 cm (ou 4 carreaux). On considère le point A d'affixe $a = -1$ et la fonction f définie du plan dans lui-même qui au point M d'affixe z , distinct de A , associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que $z' = \frac{iz}{z+1}$.

- Déterminer les points M tel que $M' = M$.
- Démontrer que pour tout point M distincts de A et O on a $OM' = \frac{OM}{AM}$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + i$.
 - Placer B et tracer la médiatrice Δ du segment $[OA]$.

- Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B' l'image du point B par f .
Établir que B' appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 1. Placer B' et tracer (C) .
 - En utilisant la question 2, démontrer que si un point M appartient à Δ , alors son image M' appartient à (C) .
 - Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct. En s'aidant de la question 2 construire à la règle et au compas le point $C' = f(C)$. On laissera apparents les traits de construction.
- On se propose de déterminer par deux méthodes différentes l'ensemble Γ des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.
 - On pose $z = x + iy$. Démontrer que

$$\text{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}.$$

En déduire la nature de l'ensemble Γ et le tracer.

- À l'aide de la question 2 retrouver géométriquement la nature de Γ .

37 (2006, métropole). Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' . On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, x', y, y' sont des nombres réels.

- Montrer que \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\text{Re}(z'\bar{z}) = 0$.
- Montrer que O, M, M' sont alignés si et seulement si $\text{Im}(z'\bar{z}) = 0$.

Applications

- N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{ON} soient orthogonaux ?
- On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\frac{1}{z^2} - 1$. On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.
 - Montrer que $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)(z^2 - 1) = -z^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$.
 - En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

38 (2007, Amérique du Sud). Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure. Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

- Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E' , image de E par f .
- Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
- On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 . Soit M un point distinct des points O, A et B .
 - Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1 , on a $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.
 - En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $(\overrightarrow{M'A}; \overrightarrow{M'B})$ en fonction de $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$.
- Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O , alors M' est un point de Δ .
- Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.
 - Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB) .
 - Tout point de (AB) a-t-il un antécédent par f ?