Logarithme népérien

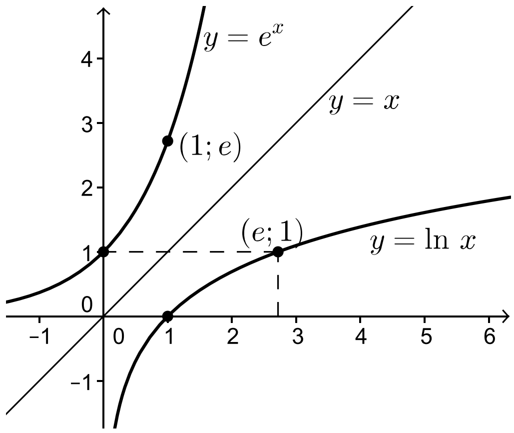
1. La fonction logarithme népérien

❖ Définition

La fonction exponentielle est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution pour tout réel $k > 0$.

Définition. *Pour tout réel strictement positif k, on appelle <u>logarithme népérien</u> de k l'unique solution de l'équation $e^x = k$. On la note* $\ln k$.
La fonction logarithme népérien, noté ln, *est la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $x \mapsto \ln x$.
On a donc l'équivalence pour tous réels x et y,

$$\begin{cases} y = \ln x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow e^y = x.$$



Les fonction exponentielle et logarithme népérien sont dites réciproques. Leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Il résulte de la définition que

- Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ (puisque $y = \ln(e^x) \Leftrightarrow e^y = e^x \Leftrightarrow y = x$).
- $\ln(1) = 0$ et $\ln e = 1$.

❖ Relation fonctionnelle

Théorème. Pour tous réels strictement positifs x et y et tout entier relatif n,
1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
2. $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$, en particulier $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$
3. $\ln x^n = n \ln x$
4. $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

Démonstration.
1. D'une part $e^{\ln(xy)} = xy$ et d'autre part $e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x}e^{\ln y} = xy$. On a donc $e^{\ln(xy)} = e^{\ln x + \ln y}$, d'où $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
2. On a $\ln x = \ln\left(\frac{x}{y} \times y\right) = \ln\frac{x}{y} + \ln y$ d'après la relation fonctionnelle, ce qui montre que $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$. Pour $x = 1$, on obtient $\ln\frac{1}{y} = \ln 1 - \ln y = -\ln y$, ce qui est la deuxième propriété.
3. On a $e^{n\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^n = x^n = e^{\ln x^n}$, d'où $n \ln x = \ln x^n$.
4. Comme $2\ln\sqrt{x} = \ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right) = \ln x$, on a bien la propriété annoncée. ■

❖ Variations de ln et (in)équations

Soit x et y deux réels strictement positifs. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,
$$\ln x < \ln y \Leftrightarrow e^{\ln x} < e^{\ln y} \Leftrightarrow x < y.$$
Cela montre que la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Par ailleurs, comme $\ln 1 = 0$, les variations de ln et son signe peuvent se résumer dans le tableau ci-dessous.

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$ 0 $+$ ↗	

On retiendra que

- Pour tout réel x, on a
$$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1, \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$
- Pour tous réels a et b, on a
$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a = b \end{cases} \text{ et } \ln a < \ln b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ 0 < a \end{cases}.$$

Exemple

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a. $7 - e^{x-1} = 3$

b. $\ln(3x + 2) = \ln(x^2 - 2)$

c. $\ln(9 - 4x) \leq \ln(x - 1)$

Réponse.

a. On a $7 - e^{x-1} = 3 \Leftrightarrow e^{x-1} = 4 \Leftrightarrow x - 1 = \ln 4$, donc $S = \{1 + \ln 4\}$.

b. On a $\ln(3x + 2) = \ln(x^2 - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ 3x + 2 = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases}$.

L'équation du second degré $x^2 - 3x - 4 = 0$ a pour racine -1 et 4 ; Ainsi
$$\begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x = -1 \text{ ou } x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$
donc $S = \{4\}$.

c. $\ln(12 - 4x) \leq \ln(x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 4x \leq x + 2 \\ 12 - 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \leq 5x \\ 12 > 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \\ 3 > x \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 3$. On conclut $S = [2; 3[$.

Exemple

Considérons la suite géométrique définie par $u_n = 0{,}5^n$. Puisque $-1 < 0{,}5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Cherchons le plus petit entier n tel que $u_n < 10^{-4}$. On a déjà vu deux méthodes, par lecture de la table de la calculatrice quand l'entier cherché n'est pas trop grand ou par utilisation d'un algorithme.

On peut calculer cet entier en résolvant l'inéquation $u_n \leq 10^{-4} \Leftrightarrow 0{,}5^n \leq 10^{-4}$.

Comme l'inconnue est en exposant, on transforme cette inéquation (dont les deux membres sont positifs) à l'aide de la fonction ln.
$$0{,}5^n \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \ln 0{,}5^n \leq \ln 10^{-4} \Leftrightarrow n \times \ln 0{,}5 \leq -4 \times \ln 10.$$
Comme $\ln 0{,}5 < 0$, on obtient
$$n \geq \frac{-4 \times \ln 10}{\ln 0{,}5} \approx 13{,}29$$
et le plus petit entier vérifiant $u_n \leq 10^{-4}$ est donc 14.

Exemple

Déterminons le nombre de chiffre de 7^{154}. Pour cela, on cherche l'entier p tel que $10^p \leq 7^{154} < 10^{p+1}$. Cette inéquation équivaut à $p \ln 10 \leq 154 \ln 7 < (p+1) \ln 10$, d'où $p \leq \frac{154 \ln 7}{\ln 10} < p+1$. Comme $\frac{154 \ln 7}{\ln 10} \approx 130{,}1$, on en déduit

$$10^{130} \leq 7^{154} < 10^{131}$$

ce qui montre que 7^{154} s'écrit avec 131 chiffres.

❖ **Logarithme népérien et dérivée**

On admet que la fonction ln est continue sur $]0; +\infty[$, cela permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème. La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction inverse :

$$\text{pour tout } x \in]0; +\infty[, \ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. Soit $a > 0$ et posons $r(x) = \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$. On doit démontrer que $\lim_{x \to a} r(x) = \frac{1}{a}$.
On a $r(x) = \frac{\ln x - \ln a}{e^{\ln x} - e^{\ln a}} = \frac{1}{\frac{e^{\ln x} - e^{\ln a}}{\ln x - \ln a}}$. La fonction ln étant continue en a, $\lim_{x \to a} \ln x = \ln a$, donc en posant $X = \ln a$, on a $\lim_{X \to \ln a} \frac{e^X - e^{\ln a}}{X - \ln a} = e^{\ln a} = a$ d'après la définition du nombre dérivée de la fonction exponentielle en $\ln a$.
Par composition des limites, on obtient $\lim_{x \to a} r(x) = \frac{1}{a}$, ce qui démontre que ln est dérivable en a de nombre dérivé $\frac{1}{a}$. ■

Théorème. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeur dans $]0; +\infty[$. Alors la fonction $\ln u : x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I et $\ln'(u) = \frac{u'}{u}$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$. Notons que le discriminant de $x^2 + 2x + 3$ est $-9 < 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 3 > 0$ ce qui prouve que f est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est dérivable et $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+3}$, et vu le signe de $2x + 2$, on en déduit que f est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

2. Limites liées à la fonction logarithme

❖ **Limites aux bornes de la fonction ln**

Théorème. On a les limites remarquables suivantes

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Démonstration. Soit A un réel positif. Si $x > e^A$, alors $\ln x > A$. Comme A est arbitraire, cela prouve que $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Pour la seconde limite, écrivons $\ln x = -\ln\frac{1}{x}$. Puisque $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, on en déduit par composition $\lim_{x\to 0^+} \ln\frac{1}{x} = +\infty$ et donc $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. ■

- **Croissance comparée**

Théorème. On a les résultats suivants.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} x\ln x = -\infty.$$

On peut écrire $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{e^{\ln x}}$. Or $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ d'après un résultat sur les fonctions exponentielles. Par composition, il vient $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
En écrivant $x\ln x = -\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ et en notant que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, la limite qui vient d'être calculée montre par composition que $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = -\infty$. ■

- **Une autre limite**

Théorème. On a $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Démonstration. La fonction ln est dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est 1, donc $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = 1$, ce qui est bien la limite annoncée. ■

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

- **Limite en $\pm\infty$.** Écrivons $f(x) = x \times \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Comme $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, par composition le quotient $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ tend vers 1. Par produit on a donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- **Limite en -1.** De $\lim_{x\to-1^-} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 0^+$ et $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, on en déduit que par composition que $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$.
- **Limite en** 0. Écrivons
$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}(1+x)\right) = x^2 \ln\frac{1}{x} + x^2\ln(1+x) = -x^2\ln x + x^2\ln(1+x).$$
Clairement $\lim_{x\to 0} x^2\ln(1+x) = 0$. En écrivant $-x^2\ln x = -x(x\ln x)$ et en utilisant $\lim_{x\to 0} x\ln x = -\infty$ on est en présence d'une forme indéterminée. Il suffit d'écrire plutôt $-x^2\ln x = -\frac{1}{2}x^2\ln x^2$ pour obtenir que $\lim_{x\to 0} (-x^2\ln x) = 0$ et donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.