

# Logarithme népérien

## 1. Logarithme népérien d'un réel strictement positif

### ❖ Définition

La fonction exponentielle est une fonction strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ . Par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $e^x = k$  admet une unique solution pour tout réel  $k > 0$ .

**Définition.** Pour tout réel strictement positif  $k$ , on appelle logarithme népérien de  $k$  l'unique solution de l'équation  $e^x = k$ . On la note  $\ln k$ .

Par exemple  $\ln 1 = 0$  (puisque  $e^0 = 1$ ) et  $\ln e = 1$  (puisque  $e^1 = e$ ).

Voici quelques propriétés résultant de la définition.

1. Pour tout réel  $k > 0$ ,  $\ln k$  est la solution de l'équation  $e^x = k$ , par conséquent  $e^{\ln k} = k$ .
2. Pour tout réel  $k$ ,  $\ln e^k$  est l'unique solution de l'équation  $e^x = e^k$ ; comme  $k$  est aussi une solution de cette équation, il vient  $\ln(e^k) = k$ .
3. Montrons que pour tous réels  $a$  et  $b$  on a

$$b = e^a \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a = \ln b \end{cases}$$

- si  $b = e^a$ , on a bien  $b > 0$  et comme la solution de l'équation  $e^x = b$  est  $\ln b$  par définition, c'est que  $a = \ln b$ .
- si  $a = \ln b$  (avec  $b > 0$ ), alors  $e^a = e^{\ln b} = b$  (propriété 1.).

### ❖ Propriétés de calcul

**Théorème.** Pour tous réels strictement positifs  $x$  et  $y$  et tout entier relatif  $n$ ,

1.  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
2.  $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ , en particulier  $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
3.  $\ln x^n = n \ln x$
4.  $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

### Démonstration.

1. D'une part  $e^{\ln(xy)} = xy$  et d'autre part  $e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} e^{\ln y} = xy$ . On a donc  $e^{\ln(xy)} = e^{\ln x + \ln y}$ ,

d'où  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ .

2. On a  $\ln x = \ln \left( \frac{x}{y} \times y \right) = \ln \frac{x}{y} + \ln y$  d'après 1., ce qui montre que  $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ .

Pour  $x = 1$ , on obtient  $\ln \frac{1}{y} = \ln 1 - \ln y = -\ln y$ , c'est la deuxième propriété.

3. On a  $e^{n \ln x} = (e^{\ln x})^n = x^n = e^{\ln x^n}$ , d'où  $n \ln x = \ln x^n$ .

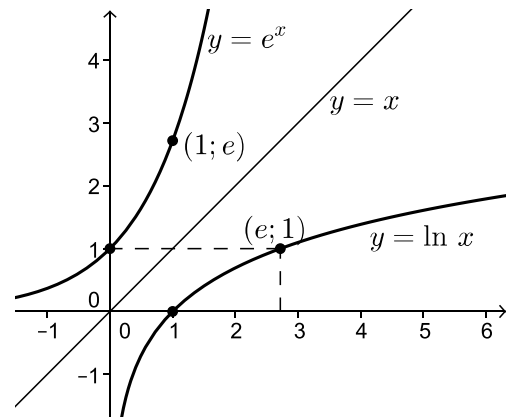
4. Comme  $2 \ln \sqrt{x} = \ln \left( (\sqrt{x})^2 \right) = \ln x$ , on a bien la propriété annoncée. ■

**Remarque.**

- Si  $n$  est un entier pair, pour tout réel  $x$  non nul, on a  $x^n > 0$  et  $\ln(x^n)$  est défini.
  - Si  $x > 0$ , d'après le théorème précédent,  $\ln(x^n) = n \ln x$  ;
  - si  $x < 0$ , on peut écrire  $\ln(x^n) = \ln((-x)^n)$ , et comme  $-x > 0$ , le théorème implique que  $\ln((-x)^n) = n \ln(-x)$ .
 On peut donc regrouper ces formules en une seule :  $\ln(x^n) = n \ln|x|$ .
- Si  $n$  est impair, pour  $x < 0$ , on a  $x^n < 0$  et il n'y a pas lieu de considérer  $\ln(x^n)$ .

**2. Fonction logarithme népérien, (in)équations**

**Définition.** La fonction logarithme népérien, noté  $\ln$ , est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $x \mapsto \ln x$ .

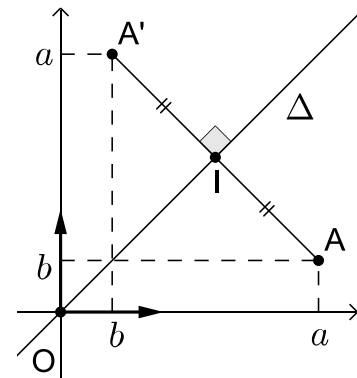


❖ **Représentation graphique de  $\ln$**

**Théorème.** Dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions exponentielles et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite  $\Delta: y = x$ .

**Démonstration.** Commençons par prouver le résultat suivant : le symétrique d'un point  $A(a; b)$  par rapport à la droite  $\Delta$  est  $A'(b; a)$ . En effet

- le milieu du segment  $[AA']$  a pour coordonnées  $(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2})$ , il appartient donc à  $\Delta$  ;
- les droites  $(AA')$  et  $\Delta$  sont perpendiculaires car  $\overrightarrow{AA'} \begin{pmatrix} b-a \\ a-b \end{pmatrix}$  et un vecteur directeur de la droite  $\Delta$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , d'où  $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 1 \times (b-a) + 1 \times (a-b) = 0$ .



En notant  $\mathcal{C}_f$  la courbe d'une fonction  $f$  on peut écrire

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_{\exp} \Leftrightarrow y = e^x \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x = \ln y \end{cases} \Leftrightarrow M'(y; x) \in \mathcal{C}_{\ln},$$

ce qui montre que les courbes  $\mathcal{C}_{\exp}$  et  $\mathcal{C}_{\ln}$  sont symétriques par rapport à  $\Delta$ . ■

❖ **Variations de  $\ln$  et (in)équations**

Soit  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs. Par croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ ,  $\ln x < \ln y \Leftrightarrow e^{\ln x} < e^{\ln y} \Leftrightarrow x < y$ .

Cela montre que la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ . Par ailleurs, comme  $\ln 1 = 0$ , les variations de  $\ln$  et son signe peuvent se résumer dans le tableau ci-dessous.

$x$	$0$	$1$	$+\infty$
$\ln x$		$-$	$+$

*(Note: An arrow in the original image points from left to right across the table, indicating increasing values.)*

On retiendra que

- Pour tout réel  $x$ , on a  $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ ,  $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$  et  $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

- Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a = b \end{cases} \text{ et } \ln a < \ln b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ 0 < a \end{cases}$$

### Exemple

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- $7 - e^{x-1} = 3$
- $\ln(3x + 2) = \ln(x^2 - 2)$
- $\ln(9 - 4x) \leq \ln(x - 1)$

#### Réponse.

a. On a  $7 - e^{x-1} = 3 \Leftrightarrow e^{x-1} = 4 \Leftrightarrow x - 1 = \ln 4$ , donc  $S = \{1 + \ln 4\}$ .

b. On a  $\ln(3x + 2) = \ln(x^2 - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ 3x + 2 = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases}$ .

L'équation du second degré  $x^2 - 3x - 4 = 0$  a pour racine  $-1$  et  $4$ ; Ainsi

$$\begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x = -1 \text{ ou } x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Donc  $S = \{4\}$ .

c.  $\ln(12 - 4x) \leq \ln(x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 4x \leq x + 2 \\ 12 - 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \leq 5x \\ 12 > 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \\ 3 > x \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 3.$

On conclut  $S = [2; 3[$ .

## 3. Application du logarithme népérien aux (in)équations avec des puissances

La propriété  $\ln(x^n) = n \ln x$  permet de résoudre des équations dans lesquelles

- l'inconnue est en puissance ;
- l'inconnue apparaît avec une puissance élevée (supérieure ou égale à 3).

### Exemple

Cherchons le plus petit entier tel que  $2^n \geq 10^7$ . En utilisant le caractère croissant de  $\ln$ ,

$$2^n \geq 10^7 \Leftrightarrow \ln 2^n \geq \ln 10^7 \Leftrightarrow n \ln 2 \geq 7 \ln 10 \Leftrightarrow n \geq \frac{7 \ln 10}{\ln 2}.$$

Comme  $\frac{7 \ln 10}{\ln 2} \approx 23,3$ , on en conclut que l'inégalité  $2^n \geq 10^7$  a lieu dès que  $n \geq 24$ .

La vérification est immédiate :  $2^{23} = 8\,388\,608 < 10^7$  et  $2^{24} = 16\,777\,216 > 10^7$ .

### Exemple

Considérons la suite géométrique définie par  $u_n = 0,5^n$ . Puisque  $-1 < 0,5 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . Cherchons le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n < 10^{-10}$ . On connaît déjà deux méthodes, par lecture de la table de la calculatrice quand l'entier cherché n'est pas trop grand ou par utilisation d'un algorithme, rappelé ci-contre.

On peut calculer cet entier en résolvant l'inéquation

$$u_n \leq 10^{-10} \Leftrightarrow 0,5^n \leq 10^{-10}.$$

Comme l'inconnue est en exposant, on transforme cette inéquation (dont les deux membres sont positifs) à l'aide de la fonction  $\ln$  :

$$0,5^n \leq 10^{-10} \Leftrightarrow \ln 0,5^n \leq \ln 10^{-10} \Leftrightarrow n \times \ln 0,5 \leq -10 \times \ln 10.$$

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 1$
Tant que $u \leq 10^{-10}$
$u \leftarrow 0,5u$
$n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que
Renvoyer $n$

Puisque  $\ln 0,5 < 0$ , on obtient

$$n \geq \frac{-10 \times \ln 10}{\ln 0,5} \approx 33,219$$

et le plus petit entier vérifiant  $u_n \leq 10^{-10}$  est donc 34.

Il n'est pas plus difficile de déterminer le rang  $n$  à partir duquel  $u_n \leq 10^{-1000}$ . Cela a lieu dès que  $n \geq \frac{-1000 \times \ln 10}{\ln 0,5} \approx 3321,9$ , donc pour  $n \geq 3322$ .

Sur les TI-82 et TI-83, l'algorithme ne fonctionnerait pas sur ce dernier exemple car la calculatrice considère que  $10^{-100} = 0$ . L'algorithme renverra 329. En effet, selon la calculatrice  $u_{329} = 0$ , alors que ce n'est pas le cas.

En réalité,  $u_{328} \approx 1,83 \cdot 10^{-99}$  (d'après la calculatrice), donc

$$u_{329} = 0,5u_{328} \approx 0,5 \times 1,83 \cdot 10^{-99} = 0,915 \cdot 10^{-99} = 9,15 \cdot 10^{-100},$$

ce qui n'est pas inférieur à  $10^{-1000}$  !

### Exemple

Déterminons le nombre de chiffre de  $7^{154}$ . Pour cela, on cherche l'entier  $p$  tel que  $10^p \leq 7^{154} < 10^{p+1}$ . Cette inéquation équivaut à  $p \ln 10 \leq 154 \ln 7 < (p+1) \ln 10$ , d'où  $p \leq \frac{154 \ln 7}{\ln 10} < p+1$ . Comme  $\frac{154 \ln 7}{\ln 10} \approx 130,1$ , on en déduit

$$10^{130} \leq 7^{154} < 10^{131}$$

ce qui montre que  $7^{154}$  s'écrit avec 131 chiffres.

L'écriture scientifique de  $7^{154}$  (et donc son nombre de chiffres) n'est pas accessible avec une TI-82 ou TI-83 puisqu'elle dépasse  $10^{100}$ .

### Exemple

Résolvons les équations  $x^8 = 38$  et  $x^9 = 38$ .

- 0 n'est visiblement pas solution de  $x^8 = 38$ , car  $0^8 = 0 \neq 38$ . Pour tout  $x \neq 0$ , on sait que  $\ln x^8 = 8 \ln|x|$ , donc, pour  $x \neq 0$ ,

$$x^8 = 38 \Leftrightarrow \ln x^8 = \ln 38 \Leftrightarrow 8 \ln|x| = \ln 38 \Leftrightarrow \ln|x| = \frac{\ln 38}{8} \Leftrightarrow |x| = \exp\left(\frac{\ln 38}{8}\right).$$

Cette équation a donc deux solutions :  $\pm \exp\left(\frac{\ln 38}{8}\right) \approx \pm 1,576$ .

- Si  $x \leq 0$ , alors  $x^9 \leq 0$ , donc une solution de l'équation  $x^9 = 38$  est nécessairement strictement positive. Pour  $x > 0$ , on a

$$x^9 = 38 \Leftrightarrow \ln x^9 = \ln 38 \Leftrightarrow 9 \ln x = \ln 38 \Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln 38}{9} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{\ln 38}{9}\right)$$

Cette équation a donc une solution :  $\exp\left(\frac{\ln 38}{9}\right) \approx 1,498$ .

**Généralisation.** Si  $n$  est un entier naturel et  $a$  un réel strictement positif, on a, pour tout  $x > 0$ ,

$$x^n = a \Leftrightarrow \ln x^n = \ln a \Leftrightarrow n \ln x = \ln a \Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln a}{n} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{\ln a}{n}\right).$$

L'équation  $x^n = a$  admet donc une unique solution sur  $[0; +\infty[$ . On l'appelle racine  $n^{\text{ième}}$  de  $a$  et on la note  $a^{\frac{1}{n}}$ . En particulier  $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$  pour tout réel  $a > 0$ .

La notation a été choisie pour respecter les règles habituelles sur les puissances :

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \times n} = a^1 = a.$$

Par exemple, la solution de  $x^8 = 38$  est  $38^{\frac{1}{8}}$  dont la calculatrice permet un calcul rapide sans résoudre l'équation comme ci-dessus.

$$\begin{array}{l} e^{(\ln(38)/8)} \\ 38^{(1/8)} \\ 1.575697876 \end{array}$$

## 4. Étude de la fonction logarithme népérien

### ❖ Dérivée de $\ln$

On admet que la fonction  $\ln$  est continue sur  $]0; +\infty[$ , cela permet de démontrer le théorème suivant.

**Théorème.** La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et sa dérivée est la fonction inverse :  
pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

**Démonstration.** Soit  $a > 0$  et posons  $r(x) = \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$ . On doit démontrer que  $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = \frac{1}{a}$ .

On a  $r(x) = \frac{\ln x - \ln a}{e^{\ln x} - e^{\ln a}} = \frac{1}{\frac{e^{\ln x} - e^{\ln a}}{\ln x - \ln a}}$ . La fonction  $\ln$  étant continue en  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a$ , donc

en posant  $X = \ln a$ , on a  $\lim_{X \rightarrow \ln a} \frac{e^X - e^{\ln a}}{X - \ln a} = e^{\ln a} = a$  d'après la définition du nombre dérivée de la fonction exponentielle en  $\ln a$ .

Par composition des limites, on obtient  $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = \frac{1}{a}$ , ce qui démontre que  $\ln$  est dérivable en  $a$  de nombre dérivé  $\frac{1}{a}$ . ■

**Théorème.** Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et à valeur dans  $]0; +\infty[$ . Alors la fonction  $\ln u : x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $I$  et  $\ln'(u) = \frac{u'}{u}$ .

### Exemple

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$ . Notons que le discriminant de  $x^2 + 2x + 3$  est  $-9 < 0$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 + 2x + 3 > 0$  ce qui prouve que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  est dérivable et  $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+3}$ , et vu le signe de  $2x + 2$ , on en déduit que  $f$  est décroissante sur  $] - \infty; -1]$  et croissante sur  $[1; +\infty[$ .

### ❖ Limites aux bornes de la fonction $\ln$

**Théorème.** On a les limites remarquables suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

**Démonstration.** Soit  $A$  un réel positif. Si  $x > e^A$ , alors  $\ln x > A$ . Comme  $A$  est arbitraire, cela prouve que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .

Pour la seconde limite, écrivons  $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ , on en déduit par composition  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x} = +\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ . ■

### ❖ Croissance comparée

**Théorème.** On a les résultats suivants.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = -\infty.$$

On peut écrire  $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{e^{\ln x}}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$  d'après un résultat sur les fonctions exponentielles. Par composition, il vient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

En écrivant  $x \ln x = -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$  et en notant que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ , la limite qui vient d'être calculée montre par composition que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = -\infty$ . ■

## ❖ Une autre limite

**Théorème.** On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .

**Démonstration.** La fonction  $\ln$  est dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est 1, donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = 1$ , ce qui est bien la limite annoncée. ■

### Exemple

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  sur  $] -\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[$ .

- **Limite en  $\pm\infty$ .** Écrivons  $f(x) = x \times \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ , par composition le quotient  $\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$  tend vers 1. Par produit on a donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

- **Limite en  $-1$ .** De  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ , on en déduit que par composition que  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ .

- **Limite en  $0^+$ .** Écrivons

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}(1+x)\right) = x^2 \ln \frac{1}{x} + x^2 \ln(1+x) = -x^2 \ln x + x^2 \ln(1+x).$$

Clairement  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(1+x) = 0$ . En écrivant  $-x^2 \ln x = -x(x \ln x)$  et en utilisant  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$  on obtient par produit de limites que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ .

