# Logarithme népérien – Exercices

## Définition, relation fonctionnelle

**1** Simplifier les nombres suivants.

**a.** $\ln e$ **b.** $e^{\ln 5}$ **c.** $\ln 1$

**d.** $e^{\ln 2}$ **e.** $\ln\sqrt{e}$ **f.** $\ln\left(\frac{(e^3)^2}{e^5}\right)$

**2** Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

**a.** $\ln 8$ **b.** $\ln\sqrt{32}$ **c.** $\ln\frac{1}{2}$

**d.** $\ln 32e$ **e.** $\ln\frac{e}{4}$ **f.** $\ln 64e^3$

**3** Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

**a.** $\ln 20$ **b.** $\ln 100$ **c.** $\ln 80e$

**d.** $\ln\sqrt{10}$ **e.** $\ln\frac{5}{4}$ **f.** $\ln\frac{5}{4e}$

**4** Vrai ou faux ? Justifier.

**a.** Pour tout réel $x$ strictement positif

$$\ln x^3 - \ln x^2 = \ln x^{25} - \ln x^{24}.$$

**b.** Pour tout réel $x$ strictement positif

$$(\ln x)^2 + \ln(x^3) > 0.$$

**c.** $\ln 2 + \ln 2^2 + \ln 2^3 + \ln 2^4 = 10\ln 2$.

## Équations et inéquations

**5** Résoudre les équations suivantes.

**a.** $\ln x = 3$ **b.** $5 - 2e^x = 0$

**c.** $2 - 3e^x = 11$ **d.** $(x+2)\ln x = 0$

**6** Résoudre les inéquations suivantes.

**a.** $3\ln x + 2 > -1$ **b.** $e^x < 8$

**c.** $\ln x < 2$ **d.** $\ln(2x-5) < \ln(3-x)$

**7** Résoudre les équations et inéquations suivantes.

**a.** $\ln(2x+4) = \ln 2$ **b.** $\ln(x+1) = \ln(2x+3)$

**c.** $\ln x(\ln x - 1) \geq 0$ **d.** $5\ln x - x\ln x = 0$

**8** Déterminer le signe des fonctions suivantes.

**a.** $f_1(x) = -3\ln x$ **b.** $f_2(x) = (x-1)\ln x$

**c.** $f_3(x) = \frac{\ln x}{x-2}$ **d.** $f_4(x) = \ln(7x+3)$

**9** Factoriser $X^2 - 3X - 4$ et en déduire les solutions des inéquations $\ln^2 x - 3\ln x - 4 \geq 0$ et $e^{2x} - 3e^x - 4 < 0$.

**10** Résoudre les équations et inéquations suivantes.

**a.** $\ln(x^2 - 2x) = \ln(3 - 4x)$

**b.** $\ln(x^2 - 5) \geq \ln(x - 3)$

## Puissances et ln

**11** Résoudre les équations suivantes puis donner une valeur approchée à $10^{-3}$.

**a.** $x^6 = 1{,}23$ **b.** $x^9 = 0{,}6$ **c.** $(5-x)^4 = 3$

**12** Déterminer le plus petit entier $n_0$ tel que si $n \geq n_0$ :

**a.** $0{,}9^n < 10^{-4}$ **b.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < 10^{-5}$ **c.** $1{,}3^n \geq 10^3$

**d.** $2^n \geq 300$ **e.** $n^2 3^n \geq 10^{2000}$ **f.** $2^n \geq n^{15}$

**13** Une balle est lâchée de 100 mètres de haut et rebondit aux $4/5^{\text{ème}}$ de sa hauteur à chaque rebond. Au bout de combien de rebonds les rebonds sont inférieurs à 1 cm ?

**14** En programmant un algorithme puis en résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier $n$ tel que

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n \geq 10^6.$$

**15** En 2016, le plus grand entier premier connu était $N = 2^{74207281} - 1$.

**1.** Déterminer $p \in \mathbb{N}$ tel que $10^p < N + 1 < 10^{p+1}$.

**2.** En déduire le nombre de chiffre de $N$.

## Logarithme népérien et dérivée

**16** Vrai ou faux ? Justifier.

Soit $f$ une fonction définie sur $]0;+\infty[$. Si $f'(x) = \frac{1}{x}$, alors $f(x) = \ln x$.

**17** Soit $C$ la courbe représentative de la fonction ln.

**1.** Déterminer une équation de la tangente $T$ à $C$ au point d'abscisse 1.

**2.** Montrer que la tangente $T'$ à $C$ au point d'abscisse $e$ passe par l'origine du repère.

**18** Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.

**a.** $f(x) = x^2 + \ln x$ **b.** $g(x) = 3 - \ln x$

**19** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 3x$.

**1.** Calculer $f'(x)$.

**2.** Résoudre $f'(x) > 0$.

**3.** Dresser alors le tableau de variation de $f$.

**20** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln x$.

**1.** Calculer $f'(x)$.

**2.** Étudier le signe de $f'(x)$ et construire alors le tableau de variation de $f$.

**3.** Montrer que la tangente $T$ à la courbe représentative $C_f$ de $f$ au point d'abscisse $e$ est située au-dessous de $C_f$.

**21** Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = (\ln x)(2 - \ln x).$$

**1.** Étudier les variations de $f$.

**2.** Donner l'équation de la tangente $T$ à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 1.

**22** Un banquier désire calculer le nombre $n$ d'années nécessaire à un placement à un intérêt composés au taux de $t$ % afin qu'il soit doublé.

**1. a.** Vérifier que cela revient à résoudre l'inéquation

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geq 2.$$

**b.** Démontrer que $n$ vérifie $n \geq \frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)}$.

**c.** Compléter le tableau suivant.

| **Taux $t$** | 2 % | 2,5 % | 3 % | 4 % | 6 % |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre d'années** | | | | | |
| $\frac{72}{t}$ | | | | | |

**d.** Émettre une conjecture : « un capital placé à intérêts composés au taux de $t$ % nécessite approximativement . . . années pour doubler ».

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point d'abscisse 1.
3. En déduire que $\ln x \approx x-1$ pour $x \approx 1$.
4. Expliquer alors l'approximation faite à la question **1.d.**

## Limites

**23** Déterminer les limites des fonctions suivantes aux bornes de l'intervalle $I$.

**a.** $f(x)=\ln(1-3x)$ ; $I=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$.

**b.** $f(x)=\ln\frac{x+2}{x-3}$ ; $I=]3;+\infty[$.

**c.** $f(x)=\ln\sqrt{1-x}$ ; $I=]-\infty;1[$.

## Études de fonctions

**24** Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par
$$f(x)=\frac{x-1}{x}\ln x.$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x-1+\ln x$.
   **b.** Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g$.
2. **a.** Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
   **b.** Déduire les variations de $f$ sur $]0;+\infty[$.

**25** Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$ et $C_f$ sa courbe représentative.

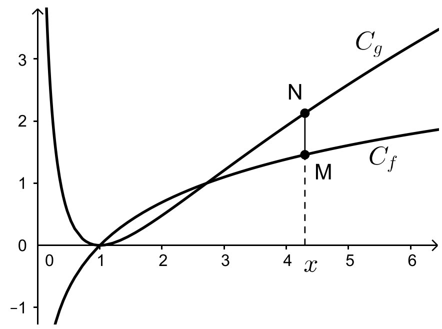
1. Déterminer la position relative de $C_f$ par rapport à l'axe des abscisses.
2. Calculer les limites de $f$ en 0 et $+\infty$.
3. Montrer que $f'(x)=\frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$.
4. Soit $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par
$$g(x)=x+1+\ln x.$$
   **a.** Étudier les variations de $g$.
   **b.** Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0;+\infty[$ et donner un encadrement à $10^{-1}$ près de $\alpha$.
   **c.** Déterminer le signe de $g(x)$ et en déduire les variations de $f$.
5. Montrer que $C_f$ et la droite $\Delta: y=-x$ se coupent au point $A(\alpha;-\alpha)$.

**26** Soit $n$ un entier naturel et $f_n$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x)=\frac{e^x-1}{x}+n\ln x$.

1. Montrer que la fonction $g_n$ définie sur $[0;+\infty[$ par $g_n(x)=(x-1)e^x+nx+1$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et que si $x>0$, alors $g_n(x)>0$.
2. **a.** Montrer que pour tout $x>0$, $f_n'(x)=\frac{g_n(x)}{x^2}$.
   **b.** En déduire les variations de $f_n$ sur $]0;+\infty[$.
3. **a.** Déterminer les limites de $f_n$ en 0 et en $+\infty$.
   **b.** Montrer que pour tout entier $n\geq 1$, il existe un unique nombre réel $\alpha_n$ de l'intervalle $]0;1]$ tel que $f_n(\alpha_n)=0$.
   **c.** Montrer que pour tout $n\geq 1$, $f_{n+1}(\alpha_n)=\ln\alpha_n$. En déduire que $\alpha_{n+1}\geq\alpha_n$ et que la suite $(\alpha_n)$ est convergente.
4. **a.** À l'aide de la question **2**, montrer que si $x\in]0;1]$, alors $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$.
   **b.** Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.
   **c.** En déduire la limite de $(\alpha_n)$.

## Sujets de baccalauréat

**27** Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes $C_f$ et $C_g$ des fonctions $f$ et $g$ définies sur $]0;+\infty[$ par
$$f(x)=\ln x \text{ et } g(x)=\ln^2 x.$$




1. Étudier la position relative des deux courbes.
2. Pour $\in]0;+\infty[$ , $M$ et $N$ sont des points de $C_f$ et $C_g$ de même abscisse $x$.
   **a.** Étudier les variations de la fonction $h$ définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=f(x)-g(x)$.
   **b.** Sur l'intervalle $[1;e]$, pour quelle valeur de $x$ la distance $MN$ est-elle maximale ? En déduire la valeur maximale de $MN$.
   **c.** Démontrer que sur $]0;1[\cup]e;+\infty[$ il existe deux nombres $a$ et $b$ $(a<b)$ pour lesquels la distance $MN$ est égale à 1. Précisez les valeurs de $a$ et $b$ à $10^{-1}$ près.

**28** *(2008, Amérique du Nord).* Soit $f$ la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$. On nomme $C$ la courbe représentative de $f$ et $\Gamma$ la courbe d'équation $y=\ln x$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de la fonction $f$ et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$.
   **b.** Préciser les positions relatives de $C$ et de $\Gamma$.
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $C$ passant par le point $O$.
   **a.** Soit $a$ un réel appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$. Démontrer que la tangente $T_a$ à $C$ au point d'abscisse $a$ passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a)-af'(a)=0$.
   **b.** Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par
$$g(x)=f(x)-xf'(x).$$
   Montrer que sur $]1;+\infty[$, les équations $g(x)=0$ et $\ln^3 x-\ln^2 x-\ln x-1=0$ ont les mêmes solutions.
   **c.** Après avoir étudié les variations de la fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t)=t^3-t^2-t-1$, montrer que la fonction $u$ s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.
   **d.** En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $C$ passant par le point $O$.

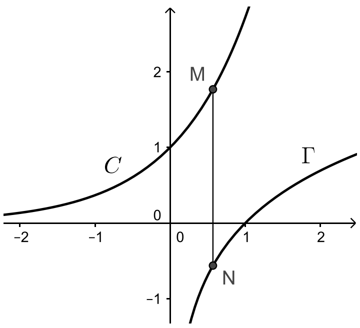
**29** *(2007, Asie).* On désigne par $a$ un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0;+\infty[$, les solutions de l'équation $E_a: x^a=a^x$.

**Partie 1** – Étude de quelques cas particuliers
1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation $E_2$.

2. Vérifier que le nombre $a$ est toujours solution de l'équation $E_a$.
3. On se propose de démontrer que $e$ est la seule solution de l'équation $E_e$.
   On note $h$ la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = x - e\ln x$.
   a. **Question de cours** : On rappelle que lorsque $t$ tend vers $+\infty$, alors $\frac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$.
      Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
   b. Déterminer les limites de $h$ en 0 et $+\infty$.
   c. Étudier les variations de $h$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   d. Dresser le tableau des variations de $h$ et conclure quant aux solutions de l'équation $E_e$.

**Partie 2** – Résolution de l'équation $E_a$
1. Soit $x$ un réel strictement positif. Montrer que $x$ est solution de l'équation $E_a$ si et seulement si $x$ est solution de l'équation $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$.
2. On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
   a. Déterminer les limites de $f$ en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.
   b. Étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction $f$.
   d. Tracer la courbe $C$ représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 2 cm).
3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions $(P_1)$ et $(P_2)$ suivantes :
   $(P_1)$ : si $a \in ]0;1]$, alors $E_a$ admet l'unique solution $a$ ;
   $(P_2)$ : si $a \in ]1;e[\cup]e;+\infty[$, alors $E_a$ admet deux solutions $a$ et $b$, l'une appartenant à l'intervalle $]1;e[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]e;+\infty[$.

**30** *(2011, Antilles-Guyane).*




1. Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par
   $$f(x) = xe^x - 1.$$
   a. Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ et étudier le sens de variation de $f$.
   b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.
   c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.
2. On note $C$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et $\Gamma$ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé.
   Soit $x$ un nombre réel strictement positif. On note $M$ le point de $C$ d'abscisse $x$ et $N$ le point de $\Gamma$ d'abscisse $x$.
   On rappelle[1] que pour tout réel $x$ strictement positif, $e^x > \ln x$.
   a. Montrer que la longueur $MN$ est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à $10^{-2}$ près.
   b. En utilisant la question **1.**, montrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à $C$ au point d'abscisse $\alpha$ et la tangente à $\Gamma$ au point d'abscisse $\alpha$ sont parallèles.

**31** *(2014, Antilles-Guyane).* On considère l'équation $(E_1) : e^x - x^n = 0$ où $x$ est un réel strictement positif et $n$ un entier naturel non nul.
1. Montrer que l'équation $(E_1)$ est équivalente à l'équation $(E_2) : \ln(x) - \frac{x}{n} = 0$.
2. Pour quelles valeurs de $n$ l'équation $(E_1)$ admet-elle deux solutions ?

**32** *(2013, Amérique du Nord).* On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$,
$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$
1. On considère l'algorithme suivant.

```
u ← 1
Pour i variant de 1 à n
  u ← √(2u)
Fin Pour
Renvoyer u
```

   a. Donner une valeur approchée à $10^{-4}$ près du résultat affiché par cet algorithme lorsque la $n$ vaut 3.
   b. Que permet de calculer cet algorithme ?
   c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de $n$.

| $n$ | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| valeur | 1,4142 | 1,9571 | 1,9986 | 1,9999 | 1,9999 |

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite $(u_n)$ ?
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a $0 < u_n \leq 2$.
   b. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$.
   c. Démontrer que la suite $(u_n)$ est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.
3. On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.
   a. Démontrer que la suite $(v_n)$ est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.
   b. Déterminer, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $v_n$ en fonction de $n$, puis de $u_n$ en fonction de $n$.
   c. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.
   d. Recopier l'algorithme ci-contre et le compléter de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de $n$ telle que
   $$u_n > 1{,}999.$$

```
n ← 0
u ← 1
```

**33** *(2015, Nouvelle-Calédonie).* Pour chaque réel $a$, on considère la fonction $f_a$ définie sur ℝ par
$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$
1. Montrer que pour tour réel $a$, la fonction $f_a$ possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de $a$ pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

[1] Le démontrer.

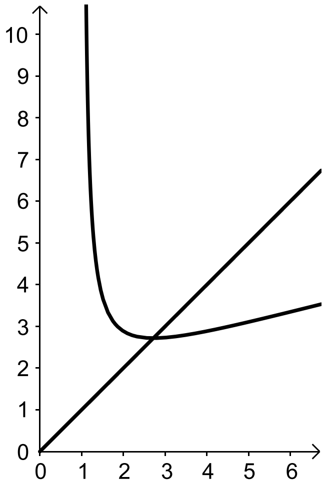
**34** *(2012, Antilles-Guyane).*

**Partie A – Étude d'une fonction**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

On a tracé ci-contre dans un repère orthogonal la courbe $C$ représentative de la fonction $f$ ainsi que la droite $D$ d'équation

$y=x$.




1. Calculer les limites de la fonction $f$ en $+\infty$ et en 1.
2. Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
3. En déduire que si $x>e$ alors $f(x)>e$.

**Partie B – Étude d'une suite récurrente**

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$u_0=5$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Sur le graphique, placer les points $A_0$, $A_1$ et $A_2$ d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives $u_0$, $u_1$ et $u_2$. On laissera apparents les traits de construction.
   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite $(u_n)$ ?
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n>e$.
   **b.** Déterminer les variations de la suite $(u_n)$.
   **c.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
   **d.** Déterminer sa limite $\ell$.
3. On donne l'algorithme suivant.

$X \leftarrow 5$
$Y \leftarrow 0$
Tant que $X>2{,}72$
    $X \leftarrow \frac{X}{\ln X}$
    $Y \leftarrow Y+1$
Fin Tant que
Renvoyer $u$

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

| $n$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $u_n$ | 5 | 3,106 674 672 8 | 2,740 652 532 3 |

| $n$ | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| $u_n$ | 2,718 372 634 6 | 2,718 281 830 0 | 2,718 281 828 5 |

**35** *(2014, Nouvelle-Calédonie).* Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit $a$ un nombre réel strictement positif.

On note $\Delta_a$ la droite d'équation $y=ax$ et $\Gamma$ la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection de $\Gamma$ et $\Delta_a$ suivant les valeurs de $a$.

Pour cela, on considère la fonction $f_a$ définie pour tout nombre réel $x$ par $f_a(x)=e^x-ax$.

On admet pour tout réel $a$ que la fonction $f_a$ est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. **Étude du cas particulier $a=2$**
   La fonction $f_2$ est donc définie $f_2(x)=e^x-2x$.
   **a.** Étudier les variations de la fonction $f_2$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition).
   **b.** En déduire que $\Gamma$ et $\Delta_2$ n'ont pas de point d'intersection.
2. **Étude du cas général où $a$ est un réel strictement positif**
   **a.** Déterminer les limites de $f_a$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   **b.** Étudier les variations de $f_a$ sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_a$ est $a-a\ln a$.
   **c.** Étudier le signe de $a-a\ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif $a$.
   **d.** Déterminer selon les valeurs du réel $a$ le nombre de points communs à $\Gamma$ et $\Delta_a$.

**36** *(2016, métropole).*

**Partie A –** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x-\ln(x^2+1).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ que l'on admet.

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | + | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | | $+\infty$ |

3. Montrer que, pour tout réel $x$ appartenant à $[0;1]$, $f(x)$ appartient à $[0;1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

$N \leftarrow 0$
Tant que $N-\ln(N^2+1)<A$
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que
Renvoyer $N$

   **a.** Que fait cet algorithme?
   **b.** Déterminer la fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour $A$ est 100.

**Partie B –** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n^2+1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ appartient à $[0;1]$.
2. Étudier les variations de la suite $(u_n)$.
3. Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.
4. On note $\ell$ sa limite, et on admet que $\ell$ vérifie l'égalité $f(\ell)=\ell$. En déduire la valeur de $\ell$.