

Logarithme népérien – Exercices

Définition, relation fonctionnelle

- 1** Simplifier les nombres suivants.
- a. $\ln e$ b. $e^{\ln 5}$ c. $\ln 1$
d. $e^{\ln 2}$ e. $\ln \sqrt{e}$ f. $\ln \left(\frac{(e^3)^2}{e^5} \right)$
- 2** Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$.
- a. $\ln 8$ b. $\ln \sqrt{32}$ c. $\ln \frac{1}{2}$
d. $\ln 32e$ e. $\ln \frac{e}{4}$ f. $\ln 64e^3$
- 3** Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.
- a. $\ln 20$ b. $\ln 100$ c. $\ln 80e$
d. $\ln \sqrt{10}$ e. $\ln \frac{5}{4}$ f. $\ln \frac{5}{4e}$
- 4** Vrai ou faux ? Justifier.
- a. Pour tout réel x strictement positif
 $\ln x^3 - \ln x^2 = \ln x^{25} - \ln x^{24}$.
b. Pour tout réel x strictement positif
 $(\ln x)^2 + \ln(x^3) > 0$.
c. $\ln 2 + \ln 2^2 + \ln 2^3 + \ln 2^4 = 10 \ln 2$.

Équations et inéquations

- 5** Résoudre les équations suivantes.
- a. $\ln x = 3$ b. $5 - 2e^x = 0$
c. $2 - 3e^x = 11$ d. $(x + 2) \ln x = 0$
- 6** Résoudre les inéquations suivantes.
- a. $3 \ln x + 2 > -1$ b. $e^x < 8$
c. $\ln x < 2$ d. $\ln(2x - 5) < \ln(3 - x)$
- 7** Résoudre les équations et inéquations suivantes.
- a. $\ln(2x + 4) = \ln 2$ b. $\ln(x + 1) = \ln(2x + 3)$
c. $\ln x (\ln x - 1) \geq 0$ d. $5 \ln x - x \ln x = 0$
- 8** Déterminer le signe des fonctions suivantes.
- a. $f_1(x) = -3 \ln x$ b. $f_2(x) = (x - 1) \ln x$
c. $f_3(x) = \frac{\ln x}{x-2}$ d. $f_4(x) = \ln(7x + 3)$
- 9** Factoriser $X^2 - 3X - 4$ et en déduire les solutions des inéquations $\ln^2 x - 3 \ln x - 4 \geq 0$ et $e^{2x} - 3e^x - 4 < 0$.

- 10** Résoudre les équations et inéquations suivantes.
- a. $\ln(x^2 - 2x) = \ln(3 - 4x)$
b. $\ln(x^2 - 5) \geq \ln(x - 3)$

Puissances et ln

- 11** Résoudre les équations suivantes puis donner une valeur approchée à 10^{-3} .
- a. $x^6 = 1,23$ b. $x^9 = 0,6$ c. $(5 - x)^4 = 3$
- 12** Déterminer le plus petit entier n_0 tel que si $n \geq n_0$:
- a. $0,9^n < 10^{-4}$ b. $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < 10^{-5}$ c. $1,3^n \geq 10^3$
d. $2^n \geq 300$ e. $n^2 3^n \geq 10^{2000}$ f. $2^n \geq n^{15}$

13 Une balle est lâchée de 100 mètres de haut et rebondit aux $\frac{4}{5}$ ^{ème} de sa hauteur à chaque rebond. Au bout de combien de rebonds les rebonds sont inférieurs à 1 cm ?

14 En programmant un algorithme puis en résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier n tel que $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n \geq 10^6$.

15 En 2016, le plus grand entier premier connu était $N = 2^{74207281} - 1$.

- Déterminer $p \in \mathbb{N}$ tel que $10^p < N + 1 < 10^{p+1}$.
- En déduire le nombre de chiffre de N .

Logarithme népérien et dérivée

16 Vrai ou faux ? Justifier.

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$. Si $f'(x) = \frac{1}{x}$, alors $f(x) = \ln x$.

17 Soit C la courbe représentative de la fonction \ln .

- Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
- Montrer que la tangente T' à C au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

18 Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.

- a. $f(x) = x^2 + \ln x$ b. $g(x) = 3 - \ln x$

19 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - 3x$.

- Calculer $f'(x)$.
- Résoudre $f'(x) > 0$.
- Dresser alors le tableau de variation de f .

20 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - \ln x$.

- Calculer $f'(x)$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ et construire alors le tableau de variation de f .
- Montrer que la tangente T à la courbe représentative C_f de f au point d'abscisse e est située au-dessous de C_f .

21 On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = -(\ln(x))^2 + 4 \ln x - 3.$$

- En utilisant l'impression d'écran du logiciel de calcul formel ci-dessous, répondre aux questions suivantes.

<pre> deriver(-ln(x))^2+4*ln(x)-3 -2/x * ln(x) + 4/x ----- resoudre((4-2*ln(x))/x>0,x) [((x>0) et (x<exp(2)))] </pre>
--

- Que vaut $f'(x)$?
 - Résoudre $f'(x) > 0$.
- En déduire les variations de f .
 - Une entreprise constate que la vente de sa production dégage un bénéfice moyen par objet en milliers d'euros égal à $f(x)$, où x désigne le nombre d'objets fabriqués. Indiquer pour quelle quantité d'objets fabriqués l'entreprise fait un bénéfice maximal.

22 Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. On note C_f la courbe de f et Γ celle de \ln .

1. a. Tracer C_f et Γ sur la calculatrice. Quelle conjecture peut-on faire sur leur position relative ?
b. Calculer $f(x) - \ln x$ et étudier le signe sur $]0; +\infty[$.
c. Démontrer la conjecture.
2. Prouver que $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$ et déterminer les variations de f .
3. Montrer que C_f et Γ ont la même tangente au point d'abscisse 1.
4. Reprendre les questions précédentes avec la fonction $f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$ où n est un entier supérieur ou égal à 0. On montrera que $f'(x) = \frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

23 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)(2 - \ln x)$.

1. Étudier les variations de f .
2. Donner l'équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

24 Un banquier désire calculer le nombre n d'années nécessaire à un placement à un intérêt composés au taux de t % afin qu'il soit doublé.

1. a. Vérifier que cela revient à résoudre l'inéquation

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geq 2.$$

- b. Démontrer que n vérifie $n \geq \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$.

- c. Compléter le tableau suivant.

Taux t	2 %	2,5 %	3 %	4 %	6 %
Nombre d'années					
$\frac{72}{t}$					

- d. Émettre une conjecture : « un capital placé à intérêts composés au taux de t % nécessite approximativement . . . années pour doubler ».
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction \ln au point d'abscisse 1.
3. En déduire que $\ln x \approx x - 1$ pour $x \approx 1$.
4. Expliquer alors l'approximation faite à la question 1.d.

Limites

25 Déterminer les limites des fonctions suivantes aux bornes de l'intervalle I .

- a. $f(x) = \ln(1 - 3x)$; $I =]-\infty; \frac{1}{3}[$.
- b. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x-3}$; $I =]3; +\infty[$.
- c. $f(x) = \ln \sqrt{1-x}$; $I =]-\infty; 1[$.

Études de fonctions

26 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \ln x.$$

1. a. Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln x$.
b. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g .
2. a. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b. Déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

27 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer la position relative de C_f par rapport à l'axe des abscisses.
2. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.
3. Montrer que $f'(x) = \frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$.
4. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x + 1 + \ln x$.
a. Étudier les variations de g .
b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et donner un encadrement à 10^{-1} près de α .
c. Déterminer le signe de $g(x)$ et en déduire les variations de f .
5. Montrer que C_f et la droite $\Delta: y = -x$ se coupent au point $A(\alpha; -\alpha)$.

28 Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

1. Montrer que la fonction g_n définie sur $]0; +\infty[$ par $g_n(x) = (x-1)e^x + nx + 1$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que si $x > 0$, alors $g_n(x) > 0$.
2. a. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$.
b. En déduire les variations de f_n sur $]0; +\infty[$.
3. a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$.
b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique nombre réel α_n de l'intervalle $]0; 1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
c. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln \alpha_n$. En déduire que $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ et que la suite (α_n) est convergente.
4. a. À l'aide de la question 2, montrer que si $x \in]0; 1[$, alors $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.
b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\alpha_n \geq e^{-\frac{1}{n}}$.
c. En déduire la limite de (α_n) .

Sujets de baccalauréat

29 (2007, Asie). On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.

On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0; +\infty[$, les solutions de l'équation $E_a : x^a = a^x$.

Partie 1 – Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2 .
2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a .
3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_e .

On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = x - e \ln x$.

a. **Question de cours** : On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\frac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty$.

- b. Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.
- c. Étudier les variations de h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- d. Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_e .

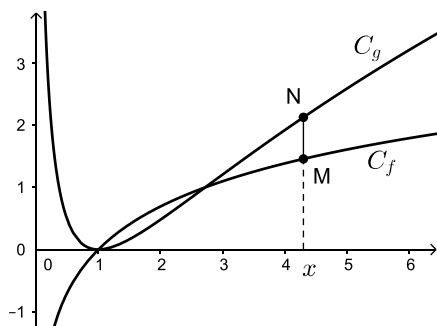
Partie 2 – Résolution de l'équation E_a

- Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$.
- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
 - Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.
 - Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - Dresser le tableau des variations de la fonction f .
 - Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).
- Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) : si $a \in]0; 1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;

(P_2) : si $a \in]1; e[\cup]e; +\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b , l'une appartenant à l'intervalle $]1; e[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]e; +\infty[$.

30 Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes C_f et C_g des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = \ln^2 x$.



- Étudier la position relative des deux courbes.
- Pour $x \in]0; +\infty[$, M et N sont des points de C_f et C_g de même abscisse x .
 - Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
 - Sur l'intervalle $]1; e]$, pour quelle valeur de x la distance MN est-elle maximale ? En déduire la valeur maximale de MN .
 - Démontrer que sur $]0; 1[\cup]e; +\infty[$ il existe deux nombres a et b ($a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1. Précisez les valeurs de a et b à 10^{-1} près.

31 (2008, Amérique du Nord). Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$. On nomme C la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$.
 - Préciser les positions relatives de C et de Γ .
- On se propose de chercher les tangentes à la courbe C passant par le point O .
 - Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$. Démontrer que la tangente T_a à C au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.
 - Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

Montrer que sur $]1; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $\ln^3 x - \ln^2 x - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

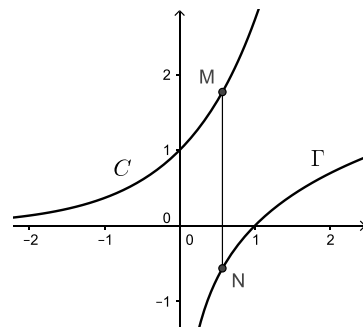
- Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur \mathbb{R} .
- En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe C passant par le point O .

32 (2011, Antilles-Guyane).

- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^x - 1.$$

- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f .



- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

- Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

- On note C la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de C d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x .

On rappelle¹ que pour tout réel x strictement positif, $e^x > \ln x$.

- Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.

- En utilisant la question 1., montrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à C au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

33 (2014, Antilles-Guyane). On considère l'équation $(E_1) : e^x - x^n = 0$ où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

- Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation $(E_2) : \ln(x) - \frac{x}{n} = 0$.
- Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

34 (2013, Amérique du Nord). On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

- On considère l'algorithme suivant.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
Sortie :	Fin Pour Afficher u

¹ Le démontrer.

- Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.
- Que permet de calculer cet algorithme ?
- Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certains valeurs de n .

n	1	5	10	15	20
valeur	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $0 < u_n \leq 2$.
 - Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
 - Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.
- On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.
 - Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) .
 - Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

35 (2012, Antilles-Guyane).

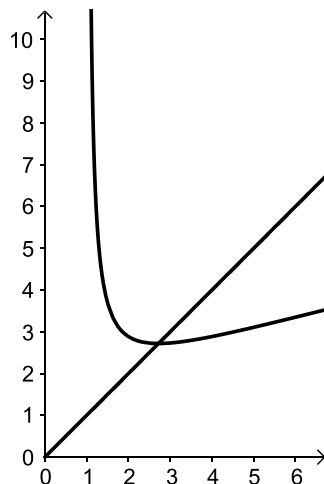
Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

On a tracé ci-contre dans un repère orthogonal la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f ainsi que la droite D d'équation

$$y = x.$$

- Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
- Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- En déduire que si $x > e$ alors $f(x) > e$.



Partie B – Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

- Sur le graphique, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 . On laissera apparents les traits de construction. Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

- Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > e$.
 - Déterminer les variations de la suite (u_n) .
 - En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - Déterminer sa limite ℓ .
- On donne l'algorithme suivant.

X et Y sont des variables réelles Affecter 5 à X et 0 à Y Tant que $X > 2,72$ Faire Affecter $\frac{x}{\ln x}$ à X Affecter $Y + 1$ à Y Fin Tant que Afficher y
--

- À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	2	3
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3
n	3	4	5
u_n	2,718 372 634 6	2,718 281 830 0	2,718 281 828 5

36 (2016, métropole).

Partie A – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1).$$

- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $f(x) = x$.
- Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$	1	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	+	
f	$-\infty$	↗			$+\infty$

- Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0; 1]$.
- On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels
Entrées	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln(N^2 + 1) < A$ N prend la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

- Que fait cet algorithme ?
- Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0; 1]$.
- Étudier les variations de la suite (u_n) .
- Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ .