Logarithme népérien – Exercices

Définition, relation fonctionnelle

1 Simplifier les nombres suivants.

a. $\ln e$ **b.** $e^{\ln 5}$ **c.** $\ln 1$

d. $e^{\ln 2}$ **e.** $\ln\sqrt{e}$ **f.** $\ln\left(\frac{(e^3)^2}{e^5}\right)$

2 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

a. $\ln 8$ **b.** $\ln\sqrt{32}$ **c.** $\ln\frac{1}{2}$

d. $\ln 32e$ **e.** $\ln\frac{e}{4}$ **f.** $\ln 64e^3$

3 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

a. $\ln 20$ **b.** $\ln 100$ **c.** $\ln 80e$

d. $\ln\sqrt{10}$ **e.** $\ln\frac{5}{4}$ **f.** $\ln\frac{5}{4e}$

4 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Pour tout réel x strictement positif
$$\ln x^3 - \ln x^2 = \ln x^{25} - \ln x^{24}.$$
b. Pour tout réel x strictement positif
$$(\ln x)^2 + \ln(x^3) > 0.$$
c. $\ln 2 + \ln 2^2 + \ln 2^3 + \ln 2^4 = 10\ln 2.$

Équations et inéquations

5 Résoudre les équations suivantes.

a. $\ln x = 3$ **b.** $5 - 2e^x = 0$

c. $2 - 3e^x = 11$ **d.** $(x+2)\ln x = 0$

6 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $3\ln x + 2 > -1$ **b.** $e^x < 8$

c. $\ln x < 2$ **d.** $\ln(2x-5) < \ln(3-x)$

7 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a. $\ln(2x+4) = \ln 2$ **b.** $\ln(x+1) = \ln(2x+3)$

c. $\ln x\,(\ln x - 1) \geq 0$ **d.** $5\ln x - x\ln x = 0$

8 Déterminer le signe des fonctions suivantes.

a. $f_1(x) = -3\ln x$ **b.** $f_2(x) = (x-1)\ln x$

c. $f_3(x) = \frac{\ln x}{x-2}$ **d.** $f_4(x) = \ln(7x+3)$

9 Factoriser $X^2 - 3X - 4$ et en déduire les solutions des inéquations $\ln^2 x - 3\ln x - 4 \geq 0$ et $e^{2x} - 3e^x - 4 < 0$.

10 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a. $\ln(x^2 - 2x) = \ln(3 - 4x)$

b. $\ln(x^2 - 5) \geq \ln(x - 3)$

Puissances et ln

11 Résoudre les équations suivantes puis donner une valeur approchée à 10^{-3}.

a. $x^6 = 1{,}23$ **b.** $x^9 = 0{,}6$ **c.** $(5-x)^4 = 3$

12 Déterminer le plus petit entier n_0 tel que si $n \geq n_0$:

a. $0{,}9^n < 10^{-4}$ **b.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < 10^{-5}$ **c.** $1{,}3^n \geq 10^3$

d. $2^n \geq 300$ **e.** $n^2 3^n \geq 10^{2000}$ **f.** $2^n \geq n^{15}$

13 Une balle est lâchée de 100 mètres de haut et rebondit aux $4/5^{\text{ème}}$ de sa hauteur à chaque rebond. Au bout de combien de rebonds les rebonds sont inférieurs à 1 cm ?

14 En programmant un algorithme puis en résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier n tel que
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n \geq 10^6.$$

15 En 2016, le plus grand entier premier connu était $N = 2^{74207281} - 1$.

1. Déterminer $p \in \mathbb{N}$ tel que $10^p < N + 1 < 10^{p+1}$.
2. En déduire le nombre de chiffre de N.

Logarithme népérien et dérivée

16 Vrai ou faux ? Justifier.

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$. Si $f'(x) = \frac{1}{x}$, alors $f(x) = \ln x$.

17 Soit C la courbe représentative de la fonction ln.

1. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
2. Montrer que la tangente T' à C au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

18 Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.

a. $f(x) = x^2 + \ln x$ **b.** $g(x) = 3 - \ln x$

19 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 3x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) > 0$.
3. Dresser alors le tableau de variation de f.

20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et construire alors le tableau de variation de f.
3. Montrer que la tangente T à la courbe représentative C_f de f au point d'abscisse e est située au-dessous de C_f.

21 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par
$$f(x) = (\ln x)(2 - \ln x).$$

1. Étudier les variations de f.
2. Donner l'équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

22 Un banquier désire calculer le nombre n d'années nécessaire à un placement à un intérêt composés au taux de t % afin qu'il soit doublé.

1. **a.** Vérifier que cela revient à résoudre l'inéquation
$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geq 2.$$
b. Démontrer que n vérifie $n \geq \frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)}$.

c. Compléter le tableau suivant.

Taux t	2 %	2,5 %	3 %	4 %	6 %
Nombre d'années					
$\mathbf{\frac{72}{t}}$					

d. Émettre une conjecture : « un capital placé à intérêts composés au taux de t % nécessite approximativement . . . années pour doubler ».

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point d'abscisse 1.
3. En déduire que $\ln x \approx x-1$ pour $x \approx 1$.
4. Expliquer alors l'approximation faite à la question **1.d.**

Limites

23 Déterminer les limites des fonctions suivantes aux bornes de l'intervalle I.

a. $f(x)=\ln(1-3x)$; $I=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$.

b. $f(x)=\ln\frac{x+2}{x-3}$; $I=]3;+\infty[$.

c. $f(x)=\ln\sqrt{1-x}$; $I=]-\infty;1[$.

Études de fonctions

24 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x-1}{x}\ln x.$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x-1+\ln x$.
   b. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g.
2. **a.** Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
   b. Déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

25 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer la position relative de C_f par rapport à l'axe des abscisses.
2. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.
3. Montrer que $f'(x)=\frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$.
4. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par
$$g(x)=x+1+\ln x.$$
   a. Étudier les variations de g.
   b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$ et donner un encadrement à 10^{-1} près de α.
   c. Déterminer le signe de $g(x)$ et en déduire les variations de f.
5. Montrer que C_f et la droite $\Delta: y=-x$ se coupent au point $A(\alpha;-\alpha)$.

26 Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x)=\frac{e^x-1}{x}+n\ln x$.

1. Montrer que la fonction g_n définie sur $[0;+\infty[$ par $g_n(x)=(x-1)e^x+nx+1$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et que si $x>0$, alors $g_n(x)>0$.
2. **a.** Montrer que pour tout $x>0$, $f_n'(x)=\frac{g_n(x)}{x^2}$.
   b. En déduire les variations de f_n sur $]0;+\infty[$.
3. **a.** Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$.
   b. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$, il existe un unique nombre réel α_n de l'intervalle $]0;1]$ tel que $f_n(\alpha_n)=0$.
   c. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $f_{n+1}(\alpha_n)=\ln\alpha_n$. En déduire que $\alpha_{n+1}\geq\alpha_n$ et que la suite (α_n) est convergente.
4. **a.** À l'aide de la question **2**, montrer que si $x\in]0;1]$, alors $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$.
   b. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.
   c. En déduire la limite de (α_n).

Sujets de baccalauréat

27 *(2007, Asie).* On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0;+\infty[$, les solutions de l'équation $E_a : x^a=a^x$.

Partie 1 – Étude de quelques cas particuliers

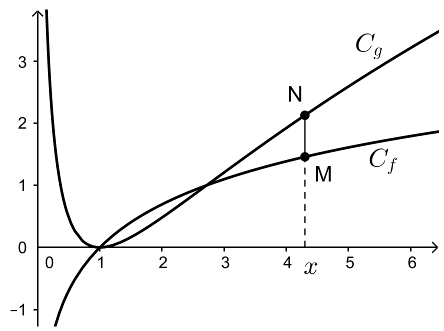
1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.
2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.
3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_e.
   On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x)=x-e\ln x$.
   a. **Question de cours** : On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\frac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$.
   Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=+\infty$.
   b. Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.
   c. Étudier les variations de h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   d. Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_e.

Partie 2 – Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.
   a. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.
   b. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.
   d. Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 2 cm).
3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :
   (P_1) : si $a\in]0;1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;
   (P_2) : si $a\in]1;e[\cup]e;+\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1;e[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]e;+\infty[$.

28 Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes C_f et C_g des fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\ln x \text{ et } g(x)=\ln^2 x.$$



1. Étudier la position relative des deux courbes.
2. Pour $\in]0;+\infty[$, M et N sont des points de C_f et C_g de même abscisse x.
   a. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=f(x)-g(x)$.

b. Sur l'intervalle $[1; e]$, pour quelle valeur de x la distance MN est-elle maximale ? En déduire la valeur maximale de MN.

c. Démontrer que sur $]0;1[\cup]e;+\infty[$ il existe deux nombres a et b ($a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1. Précisez les valeurs de a et b à 10^{-1} près.

29 *(2008, Amérique du Nord).* Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$. On nomme C la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - \ln x)$.

   b. Préciser les positions relatives de C et de Γ.
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe C passant par le point O.

   a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$. Démontrer que la tangente T_a à C au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.

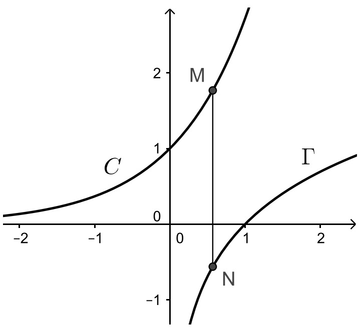
   b. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par
   $$g(x) = f(x) - xf'(x).$$
   Montrer que sur $]1;+\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $\ln^3 x - \ln^2 x - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

   c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

   d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe C passant par le point O.

30 *(2011, Antilles-Guyane).*

1. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par
   $$f(x) = xe^x - 1.$$



   a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.

   b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

   c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2. On note C la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé.
   Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de C d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x.
   On rappelle[1] que pour tout réel x strictement positif, $e^x > \ln x$.

   a. Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.

   b. En utilisant la question **1.**, montrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à C au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

31 *(2014, Antilles-Guyane).* On considère l'équation $(E_1) : e^x - x^n = 0$ où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation $(E_2) : \ln(x) - \frac{x}{n} = 0$.
2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

32 *(2013, Amérique du Nord).* On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant.

```
u ← 1
Pour i variant de 1 à n
  u ← √(2u)
Fin Pour
Renvoyer u
```

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat affiché par cet algorithme lorsque la n vaut 3.

   a. Que permet de calculer cet algorithme ?

   b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
valeur	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n \leq 2$.

   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

   b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

   d. Recopier l'algorithme ci-contre et le compléter de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que
   $$u_n > 1{,}999.$$

```
n ← 0
u ← 0
```

33 *(2015, Nouvelle-Calédonie).* Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

[1] Le démontrer.

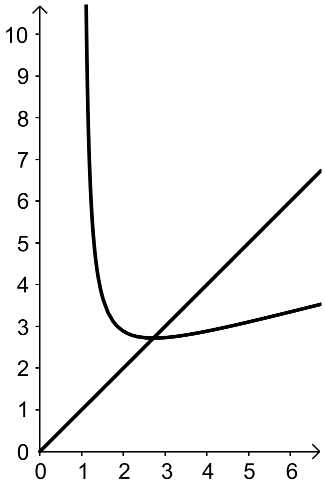
34 *(2012, Antilles-Guyane).*

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

On a tracé ci-contre dans un repère orthogonal la courbe C représentative de la fonction f ainsi que la droite D d'équation

$$y=x.$$



1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
3. En déduire que si $x>e$ alors $f(x)>e$.

Partie B – Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0=5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Sur le graphique, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.
   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n>e$.
   b. Déterminer les variations de la suite (u_n).
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   d. Déterminer sa limite ℓ.
3. On donne l'algorithme suivant.

```
X ← 5
Y ← 0
Tant que X > 2,72
    X ← X / ln X
    Y ← Y + 1
Fin Tant que
Renvoyer u
```

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	2	3
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3

n	3	4	5
u_n	2,718 372 634 6	2,718 281 830 0	2,718 281 828 5

35 *(2014, Nouvelle-Calédonie).* Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit a un nombre réel strictement positif.

On note Δ_a la droite d'équation $y=ax$ et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection de Γ et Δ_a suivant les valeurs de a.

Pour cela, on considère la fonction f_a définie pour tout nombre réel x par $f_a(x)=e^x-ax$.

On admet pour tout réel a que la fonction f_a est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. **Étude du cas particulier $a=2$**
   La fonction f_2 est donc définie $f_2(x)=e^x-2x$.
   a. Étudier les variations de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition).
   b. En déduire que Γ et Δ_2 n'ont pas de point d'intersection.
2. **Étude du cas général où a est un réel strictement positif**
   a. Déterminer les limites de f_a en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Étudier les variations de f_a sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_a est $a-a\ln a$.
   c. Étudier le signe de $a-a\ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif a.
   d. Déterminer selon les valeurs du réel a le nombre de points communs à Γ et Δ_a.

36 *(2016, métropole).*

Partie A – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x-\ln(x^2+1).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0;1]$, $f(x)$ appartient à $[0;1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
Tant que N − ln(N² + 1) < A
    N ← N + 1
Fin Tant que
Renvoyer N
```

   a. Que fait cet algorithme?
   b. Déterminer la fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B – Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n^2+1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0;1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell)=\ell$. En déduire la valeur de ℓ.