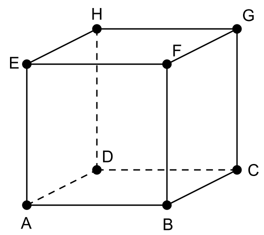
Géométrie dans l'espace

1. Position relative de droites et de plans

❖ **Position relative de deux droites**

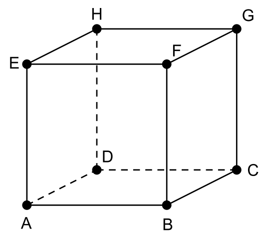
Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.

Droites non coplanaires. Il n'existe pas de plan contenant les deux droites.

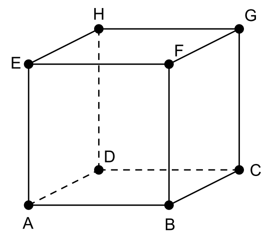


Les droites (AD) et (EF) ne sont pas coplanaires.

Droites coplanaires. Il existe un plan contenant les deux droites, elles sont donc parallèles ou sécantes.



Les droites (AB) et (BH) sont sécantes en B.

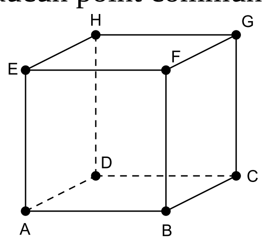


Les droites (AD) et (FG) sont parallèles.

❖ **Position relative de deux plans**

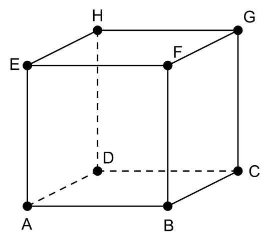
Deux plans de l'espace sont soit parallèles, soit sécants.

Plans parallèles. Ils sont confondus ou n'ont aucun point commun.



Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.

Plans sécants. Ce sont deux plans non parallèles. Leur intersection est une droite.

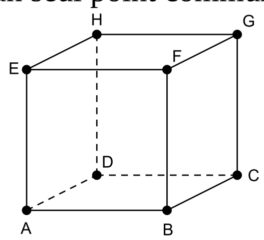


Les plans (ABC) et (BCF) sont sécants. Leur droite d'intersection est (BF).

❖ **Position relative d'une droite et d'un plan**

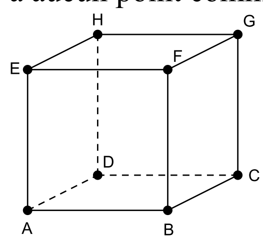
Une droite et un plan sont soit sécants, soit parallèles.

Droite et plan sécants. Ils ont un seul point commun.

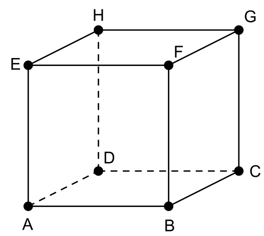


La droite (FH) et le plan (ABF) sont sécants en F.

Droite et plan parallèles. La droite est contenue dans le plan ou n'a aucun point commun avec lui.



La droite (FH) est contenue dans le plan (EFG).

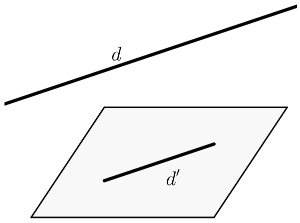


La droite (EG) est parallèle au plan (ABC).

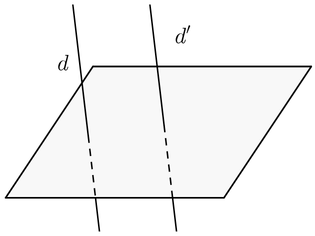
2. Parallélisme de droites et plans

❖ **Droites ou plans parallèles**

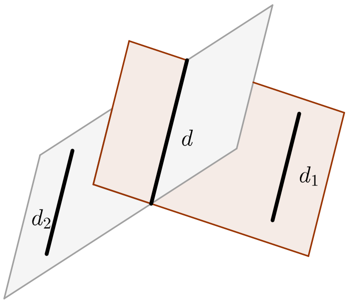
Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite du plan.



Si deux droites sont parallèles, tout plan sécant à l'une est sécant à l'autre.



Propriété. Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

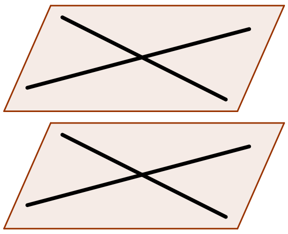


❖ **Théorème du toit.**

Soit deux plans P_1 et P_2 sécants contenant respectivement deux droites parallèles d_1 et d_2. Alors l'intersection de P_1 et P_2 est une droite parallèle à d_1 et d_2.

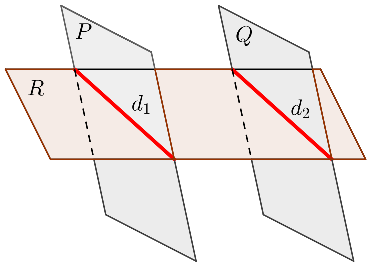
❖ **Plans parallèles**

Si un plan P contient deux droites sécantes parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors P et Q sont parallèles.



Si deux plans sont parallèles à un même plan, alors ils sont parallèles entre eux.

Soit P et Q deux plans parallèles. Si R est un plan sécant avec P, alors Q et R sont sécants et les droites d'intersection de R avec P et Q sont parallèles.



3. Orthogonalité

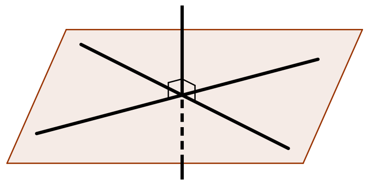
❖ **Orthogonalité de deux droites de l'espace**

Définition. *Deux droites (d_1) et (d_2) sont dites <u>orthogonales</u> si on peut trouver un point I tel que les parallèles à ces droites passant par I sont perpendiculaires. On note $(d_1) \perp (d_2)$.*

Théorème. Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

❖ **Orthogonalité d'une droite et d'un plan**

Définition. *Une droite (D) et un plan (P) sont dits perpendiculaires ou orthogonaux si (D) est orthogonale à deux droites sécantes de (P).*

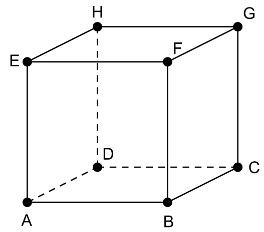


Théorème. Si une droite (D) est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Théorème.
1. Il existe une unique droite (d) passant par un point A et orthogonale à un plan (P) donné.
2. Il existe un unique plan (P) passant par un point A et orthogonale à une droite (d) donnée.
3. Si deux droites (d) et (d') sont parallèles et si (d) est orthogonal à (P), alors (d') est orthogonal à (P).
4. Si deux droites (d) et (d') sont orthogonales à un même plan (P), alors elles sont parallèles.
5. Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, toute droite (d) orthogonale à (P) est orthogonale à (P').

Exemple

La droite (AE) est perpendiculaire à (AB) et à (AD), donc elle est perpendiculaire au plan (ABD).
Comme (BD) est incluse dans ce plan, on en déduit que les droites (AE) et (BD) sont orthogonales.



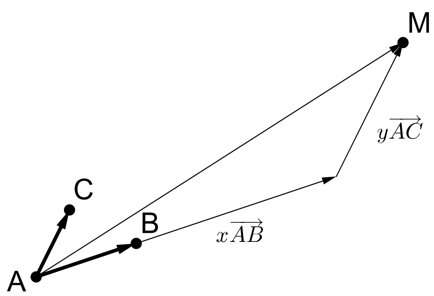
4. Vecteurs de l'espace

Les définitions et les calculs sur les vecteurs du plan peuvent être étendus à l'espace. On obtient notamment les propriétés suivantes.

Définitions, propriétés.
1. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.
2. Les points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
3. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Les plans peuvent être facilement caractérisés par le théorème suivant.

Théorème. Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace. Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que
$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$



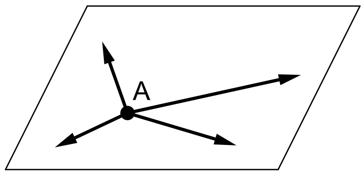
On dit qu'on a décomposé $\overrightarrow{AM}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ou encore qu'on a exprimé $\overrightarrow{AM}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Les réels x et y sont les coordonnées du point M dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ du plan (ABC).

Définition. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs de deux droites non parallèles d'un plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de ce plan.*

Ainsi, Le point M appartient au plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par A si et seulement s'il existe deux réels x et y tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

5. Vecteurs coplanaires et base de l'espace

Définition. *Des vecteurs sont dits coplanaires si leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.*



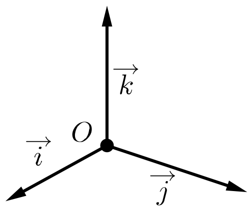
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs.
- Si deux d'entre eux sont colinéaires, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires car ils ne donnent en fait que deux directions.
- Sinon, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Exemple

Dans le cube, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires car $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.

L'intérêt des triplets de vecteurs non colinéaires réside dans le théorème suivant.

Théorème (décomposition dans une base de l'espace). Soit $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ des vecteurs non coplanaires de l'espace (on dit que ces vecteurs forment une base de l'espace).
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet de réels $(a; b; c)$ tel que
$$\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}.$$
Ces réels s'appellent coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$.



Exemple

Dans une base $\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix}$, $\vec{t}\begin{pmatrix}-4\\1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix}-9\\-4\\0\end{pmatrix}$.
Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base et décomposer $\vec{s}$ dans cette base. Montrer que $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}\right)$ n'est pas une base.

Réponse. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires puisque $-1 \times (-1) \neq 0 \times 2$, donc la coplanarité des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ équivaut à l'existence de deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Cela donne le système suivant.
$$\begin{cases} 1 = -x + 2y \\ 7 = -y \\ 3 = 3x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -15 \\ y = -7 \\ 3 = 3 \times (-15) - 7 \end{cases}$$
Le système n'a pas de solution, donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base.

Exprimons $\vec{s}\begin{pmatrix}-9\\-4\\0\end{pmatrix}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. On a

$$\vec{s} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + c = -9 \\ -b + 7c = -4 \\ 3a + b + 3c = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 7b + 6c = -27 \\ -b + 7c = -4 \\ 3a + b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 7L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 55c = -55 \\ b = 4 + 7c \\ 3a + b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

Ainsi $\vec{s} = 2\vec{u} - 3\vec{v} - \vec{w}$.

Quant à la seconde question, on doit résoudre :

$$\begin{cases} -4 = -x + 2y \\ 1 = -y \\ 5 = 3x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ 5 = 3 \times 2 - 1 \end{cases}$$

On a donc $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, ce qui montre que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas une base.

6. Repérage dans l'espace

Un <u>repère</u> de l'espace est un quadruplet $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ où O est un point et $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. Ce repère est dit <u>orthonormé</u> lorsque les droites (OI), (OJ), (OK) sont perpendiculaires deux à deux et que $OI = OJ = OK$.
Soit M un point de l'espace. Les coordonnées de M dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$. On dit que x est l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote.

Les formules du plan s'étendent à l'espace. Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors

- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$;
- le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$;
- si le repère est orthonormé, on a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

<u>Exemple</u>

On se place dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace et on considère les points $A(-1; 0; 2)$, $B(3; -1; 0)$ et $C(0; -2; -1)$.

1. Montrer que ces points définissent un plan.
2. Le point $D(-1; 1; 3)$ appartient-il au plan (ABC) ?
3. Démontrer qu'un point $M(a; b; c)$ appartient à (ABC) si et seulement si

$$a - 10b + 7c - 13 = 0.$$

Réponse.

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$. Puisque $4 \times (-2) \neq -1 \times 1$, ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les points A, B, C ne sont pas alignés, ils définissent donc un plan.
2. Le point D appartient au plan si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Comme $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, cela revient à résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 0 = 4x + y \\ 1 = -x - 2y \\ 1 = -2x - 3y \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1 + 4L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + 2L_3}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 0 = 4x + y \\ 4 = -7y \\ 2 = -5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4x + y \\ y = -\frac{4}{7} \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, donc D n'appartient pas au plan (ABC).

3. Puisque $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} a+1 \\ b \\ c-2 \end{pmatrix}$, l'appartenance de M à (ABC) se traduit par l'existence de deux réels x et y tels que

$$\begin{cases} a+1=4x+y \\ b=-x-2y \\ c-2=-2x-3y \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1+4L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1+2L_3}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+1=4x+y \\ a+1+4b=-7y \\ a+1+2(c-2)=-5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a+1-y}{4} \\ y=-\frac{a+1+4b}{7} \\ y=-\frac{a+2c-3}{5} \end{cases}$$

- Si $-\frac{a+1+4b}{7} \neq -\frac{a+2c-3}{5}$, le système n'a pas de solution car on a deux valeurs de y (comme à la question 2).
- Si $-\frac{a+1+4b}{7} = -\frac{a+2c-3}{5}$, le système admet une solution.

Comme

$$\frac{a+1+4b}{7}=\frac{a+2c-3}{5} \Leftrightarrow 5(a+1+4b)=7(a+2c-3) \Leftrightarrow a-10b+7c-13=0,$$

on a prouvé que le point $M(a;b;c)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si

$$a-10b+7c-13=0.$$

On vérifie d'ailleurs que les coordonnées des points A, B, C vérifient cette égalité. L'équation $x-10y+7z-13=0$ s'appelle équation cartésienne du plan (ABC). Cette notion sera étudiée dans le chapitre sur le produit scalaire.

7. Représentations paramétriques

On se place dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace.

Théorème. Soit D la droite passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.
Un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient à D si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x=x_A+ta \\ y=y_A+tb \\ z=z_A+tc \end{cases}$$

Démonstration. C'est la traduction de $M \in D \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM}=t\vec{u}$. ■

Définition. *Ce système s'appelle une* <u>*équation paramétrique*</u> *ou* <u>*représentation paramétrique*</u> *de la droite.*

<u>Exemple</u>

Soit $A(1;2;3)$ et $B(2;3;5)$. Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc une équation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3+2t \end{cases}$. Pour $t=0$, on obtient le point A et pour $t=1$ le point B.

Mais $-2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur, donc $\begin{cases} x=2-2t \\ y=3-2t \\ z=5-4t \end{cases}$ est également une équation paramétrique de (AB). Pour $t=\frac{1}{2}$ on obtient le point A et pour $t=0$ on obtient le point B.

Théorème. Soit P le plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$
Un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à P si et seulement s'il existe deux réels t et t' tels que

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$$

Démonstration. C'est la traduction de $M \in P \Leftrightarrow \exists(t, t') \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$. ■

<u>Exemple</u>

Soit $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 5)$, $C(1; 1; 0)$, $D(-1; 3; 0)$ et $E(2; 1; -1)$.
Déterminer la position de relative de la droite (AB) et du plan (CDE).

Réponse. La droite (AB) a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + 2s \end{cases}$, où $s \in \mathbb{R}$ d'après l'exemple précédent.
Le plan (CDE) est dirigé par $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passe par C, donc une équation paramétrique du plan est $\begin{cases} x = 1 - 2t + t' \\ y = 1 + 2t \\ z = -t' \end{cases}$, où $(t, t') \in \mathbb{R}^2$.

On est donc amené à résoudre le système $\begin{cases} 1 + s = 1 - 2t + t' \\ 2 + s = 1 + 2t \\ 3 + 2s = -t' \end{cases}$.

On élimine par exemple t en effectuant $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$:

$$\begin{cases} 3 + 2s = 1 - 2t + t' + (1 + 2t) \\ 2 + s = 1 + 2t \\ 3 + 2s = -t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2s = 2 + t' \\ 3 + 2s = -t' \\ 2 + s = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t' = 2 + t' \\ 3 + 2s = -t' \\ 2 + s = 1 + 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \\ 3 + 2s = 1 \\ 2 + s = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \\ s = -1 \\ 2 - 1 = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \\ s = -1 \\ t = 0 \end{cases}.$$

En faisant $s = -1$ dans l'équation paramétrique de (AB), ou en faisant $(t, t') = (0, -1)$ dans l'équation paramétrique de (CDE), on en déduit que (AB) et (CDE) sont sécants en le point Q de coordonnées $(0; 1; 1)$.