Complément du cours : calculs approchés d'intégrales

Dans ce qui suit, on se place dans un repère orthogonal $(O;I,J)$ du plan.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On subdivise l'intervalle $[a;b]$ en n sous-intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$.
Posons $x_k = a + kh$ pour $0 \leq k \leq n$. On a notamment $x_0 = a$ et $x_n = b$.

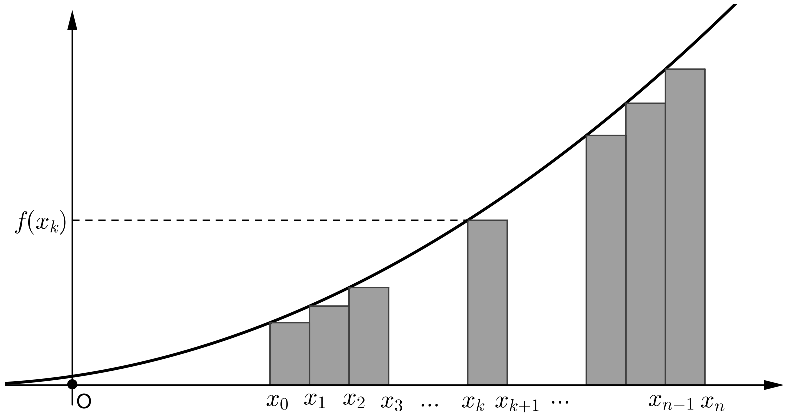
On souhaite déterminer une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ qui désigne l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

1. La méthode des rectangles

Sur chacun des intervalles $[x_k; x_{k+1}]$ (pour $0 \leq k \leq n$) on remplace l'aire sous la courbe $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ par l'aire du rectangle dont les dimensions sont $x_{k+1} - x_k = h$ et $f(x_k)$, on a donc $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx hf(x_k)$ et finalement

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1} hf(x_k) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)}$$

Ceci constitue une approximation par les rectangles « inférieurs », comme l'illustre la figure ci-dessous.



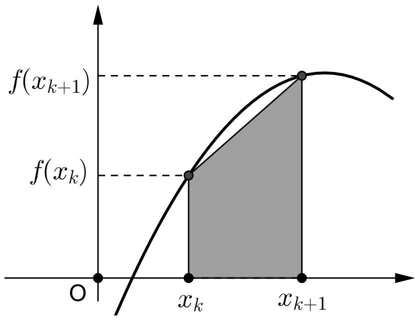
Sur $[x_k; x_{k+1}]$ on peut également remplacer $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ par le rectangle de dimension h et $f(x_{k+1})$. On a alors une approximation par les rectangles « supérieurs » et

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

2. La méthode des trapèzes

Ici on remplace $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ par l'aire du trapèze de hauteur $x_{k+1} - x_k = h$ et dont les bases sont $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$.
On fait donc l'approximation

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \times \left(f(x_k) + f(x_{k+1})\right).$$



Il en résulte

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_k)+f(x_{k+1})\big).$$

On peut simplifier cette somme pour éviter de calculer deux fois $f(x_k)$ (pour les valeurs de k telles que $1 \leq k \leq n-1$). Écrivons sans symbole $\sum$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_k)+f(x_{k+1})\big) = \big(f(x_0)+f(x_1)\big)+\big(f(x_1)+f(x_2)\big)+\cdots+\big(f(x_{n-1})+f(x_n)\big).$$

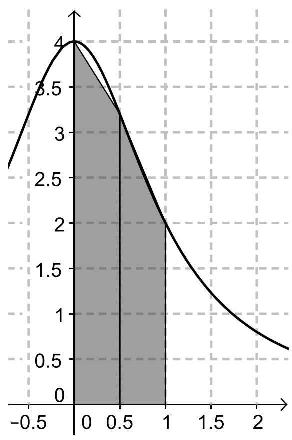
On constate que les termes $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_{n-1})$ apparaissent deux, contrairement à $f(x_0)=f(a)$ et $f(x_n)=f(b)$ qui n'apparaissent qu'une fois.
Finalement on obtient

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]}$$

Cette valeur est la moyenne des deux approximations obtenues par la méthode des rectangles « inférieurs » et « supérieurs ».

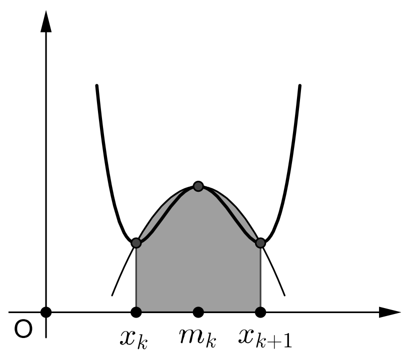
Exemple. On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{4}{x^2+1}$.
Pour déterminer une valeur approchée de $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, on a subdivisé l'intervalle $[0;1]$ en deux intervalles de largeur $\frac{1}{2}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{0{,}5}{2}\times\big(f(0)+f(0{,}5)\big)+\frac{0{,}5}{2}\times\big(f(0{,}5)+f(1)\big)\\ &\approx 0{,}5\left[\frac{f(0)+f(1)}{2}+f(0{,}5)\right]\approx 3{,}1.\end{aligned}$$



3. La méthode de Simpson

Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on appelle m_k le milieu de $[x_k; x_{k+1}]$, c'est-à-dire $m_k=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$.
Sachant que par trois points non alignés il passe une parabole et une seule (cela se démontre en résolvant un système), on remplace cette fois $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ par l'aire sous la courbe de la parabole passant par les points de la courbe de f d'abscisse x_k, m_k et x_{k+1} (on remplace la parabole par une droite si ces points sont alignés).



La difficulté qui se pose est alors la suivante : comment calculer l'aire sous cette parabole ? La réponse est dans le théorème suivant qui résulte d'un simple calcul (une fois que le cours sur les primitives aura été vu).

Théorème (formule des trois niveaux). Si φ est une fonction affine ou une fonction du second degré sur un intervalle $[\alpha;\beta]$ alors

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\beta-\alpha}{6}\left[\varphi(\alpha)+4\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\varphi(\beta)\right].$$

En prenant $\alpha = x_k$ et $\beta = x_{k+1}$, il vient $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}[f(x_k) + 4f(m_k) + f(x_{k+1})]$ et

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k) + 4f(m_k) + f(x_{k+1})].$$

Pour éviter deux fois le calcul des $f(x_k)$ (pour $0 \leq k \leq n-1$), on procède comme dans le paragraphe 2, et on arrive à

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_k) + 2f(m_k)\big) + \frac{f(b) - f(a)}{2}\right]}, \text{où } m_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Cette formule conduit à l'algorithme ci-contre, en remarquant que $m_{k+1} = m_k + h$.

```
Saisir a, b, n
h ← (b−a)/n
x ← a
m ← a + h/2
s ← 0
Pour k de 0 à n − 1
  s ← s + f(x) + 2f(m)
  x ← x + h
  m ← m + h
Fin Pour
s ← h/3 × (s + (f(b)−f(a))/2)
Afficher s
```

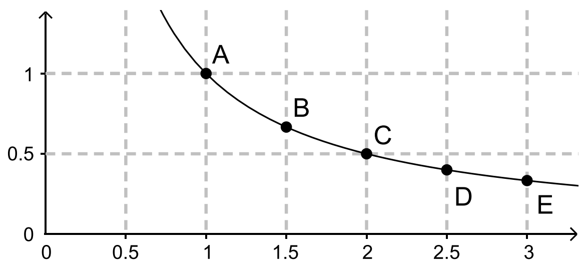
Exemple. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Pour calculer une valeur approchée de $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, on découpe $[1; 3]$ en deux sous-intervalles de longueur 1.
Sur l'intervalle $[1; 2]$, on a

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}\left(f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right) = \frac{25}{36}$$

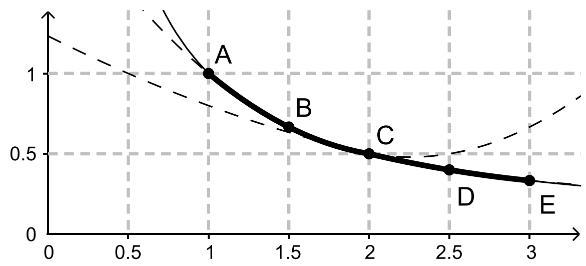
et sur l'intervalle $[2; 3]$,

$$\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}\left(f(2) + 4f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3)\right) = \frac{73}{180}.$$

Ainsi $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{25}{36} + \frac{73}{180} = \frac{11}{10} = 1{,}1$, ce qui est une très bonne approximation puisqu'on verra dans le cours que la valeur exacte de cette intégrale est $\ln 3 \approx 1{,}099$.



La courbe de f



La courbe approchée de f sur $[1; 3]$ par deux arcs de paraboles : celui passant par A, B, C et celui passant par C, D, E.

4. Rapidité de convergence, calcul de l'erreur

On peut démontrer (mais ce n'est pas du niveau de la Terminale S) qu'il existe une constante C_1 (dépendant de f et de $[a; b]$) telle que si R_n désigne l'approximation $h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ obtenu dans la méthode des rectangles, alors

$$\left|R_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{C_1}{n}.$$

Cela montre par exemple que si l'on multiplie le nombre d'itération n par 10, on divise l'erreur commise par 10.

De même, si T_n (resp. S_n) désigne l'approximation obtenue par la méthode des trapèzes (resp. de Simpson), il existe des constantes C_2 et C_3 telles que

$$\left|T_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{C_2}{n^2} \text{ et } \left|R_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{C_3}{n^4}.$$

Il en résulte alors que si l'on multiplie n par 10, l'erreur commise par la méthode des trapèzes (resp. de Simpson) est divisée par 100 (resp. 10 000).

La méthode de Simpson est donc de loin la plus performante pour diminuer l'erreur. En revanche tout cela ne dit rien sur l'erreur effectivement commise entre l'intégrale et son approximation. Il existe des théorèmes à ce sujet, mais les énoncés sont techniques.

Contentons-nous d'effectuons quelques expérimentations (pour la méthode des rectangles, on utilise la méthode des rectangles « inférieurs »).

- Calcul de $I = \int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ (vu dans le paragraphe 2)

	R_n	T_n	S_n
$n = 2$	3,6	3,1	3,141568627
$n = 5$	3,334926114	3,134926114	3,141592614
$n = 10$	3,239925989	3,139925989	3,141592653
$n = 30$	3,174740802	3,141407468	3,141592654

La valeur exacte de I est $\pi \approx 3{,}141592654$.
On constate ainsi que S_2 est déjà une approximation à 10^{-4} de I ! Au bout de 10 itérations, la méthode de Simpson donne une erreur inférieure à 10^{-8} alors que la méthode des rectangles donne erreur inférieure à 10^{-1}. La méthode des trapèzes n'est pas ridicule puisque T_{30} donne une erreur inférieure à 10^{-3}.

- Calcul de $J = \int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (vu dans le paragraphe 3)

	R_n	T_n	S_n
$n = 2$	1,5	1,166666667	1,1
$n = 5$	1,243600844	1,11026751	1,098660599
$n = 10$	1,168228993	1,101562327	1,098615505
$n = 30$	1,121163567	1,098941345	1,098612329

La valeur exacte de J est $\ln 3 \approx 1{,}098612286$.
On constate ici que pour un même nombre d'itérations, les erreurs sont plus grandes que pour le calcul de I.