Intégration

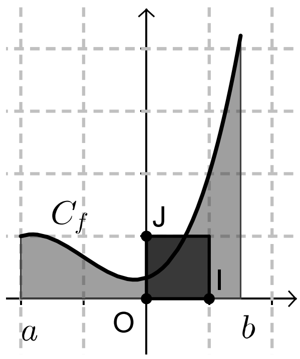
1. Intégrale d'une fonction continue positive

❖ **Définition de l'intégrale**

Définition. *Dans un repère orthogonal* $(O; I, J)$ *on appelle* <u>*unité d'aire*</u> *l'aire du rectangle de côtés* $[OI]$ *et* $[OJ]$.

Définition. *Soit* f *une fonction continue positive sur l'intervalle* $[a; b]$ *et* C_f *sa courbe représentative dans un repère orthogonal* $(O; I, J)$.
<u>*L'intégrale de* f *entre* a *et* b</u> *est l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe* C_f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = a$ *et* $x = b$*. On note ce nombre* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
On dit que a *est la* <u>*borne inférieure*</u> *de l'intégrale et* b *sa* <u>*borne supérieure*</u>.

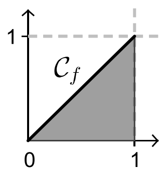
Sur la figure ci-contre, on a coloré en noir le rectangle donnant l'unité d'aire et en gris l'aire sous la courbe.



Remarque.
1. La variable x peut-être remplacée par n'importe quelle autre lettre dans l'écriture de l'intégrale. Par exemple $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ désignent les mêmes nombres.
2. On voit que $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ si $a \leq b \leq c$.

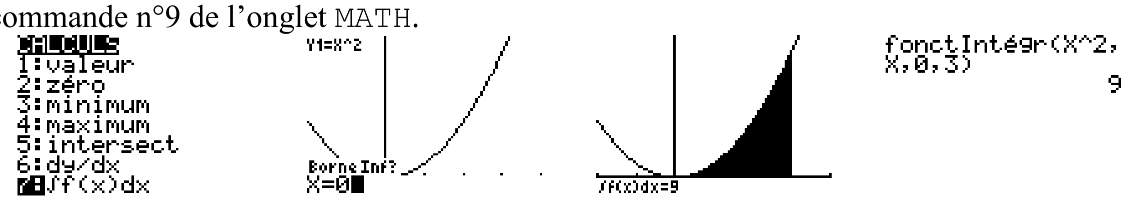
<u>**Exemple**</u>

Calculons $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto x$ est positive et continue sur $[0; 1]$. Le nombre $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ est donc l'aire du triangle rectangle ci-contre. Donc $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.



<u>**Exemple**</u>

À l'aide la calculatrice on va calculer $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x$. Après avoir rentré la fonction $x \mapsto x^2$ dans l'éditeur d'équation, ouvrir l'outil « calculs » en faisant $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$. Choisir ensuite `∫ f(x)dx`, rentrer la borne inférieure (ici 0) puis la borne supérieure (ici 3) puis valider.
On lit alors $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = 9$. La simplicité de ce résultat sera justifiée plus loin.
On peut aussi utiliser la commande `fonctIntégr` accessible par la touche $\boxed{\text{math}}$ puis la commande n°9 de l'onglet `MATH`.



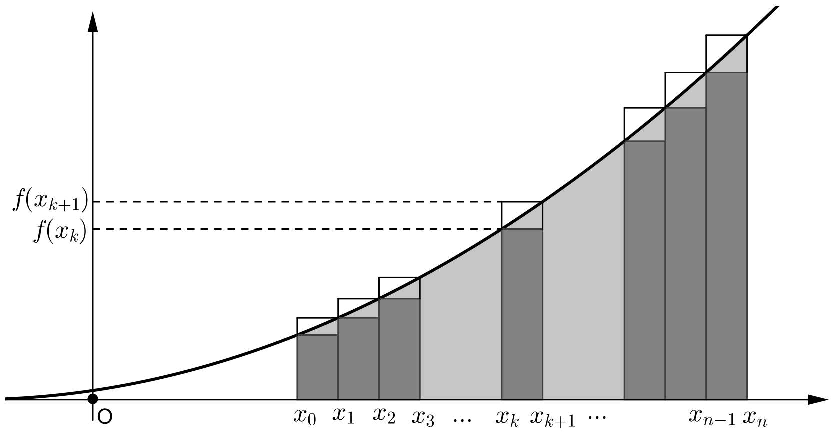
On peut aussi procéder grâce à un logiciel de calcul formel, par exemple Xcas.

integrer(x^2,x,0,3) 9

❖ Encadrement de l'intégrale d'une fonction positive

Pour déterminer une approximation de l'intégrale d'une fonction continue positive sur $[a;b]$, on peut partager l'intervalle $[a;b]$ en n sous-intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$.
Posons pour $0 \leq k \leq n$, $x_k = a + \frac{b-a}{n} \times k$. Les intervalles $[x_k; x_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq n-1$ forment une subdivision de $[a;b]$ en n intervalle de même longueur h.
Sur chacun des intervalles $[x_k; x_{k+1}]$, l'aire sous la courbe de f est comprise entre les aires de deux rectangles de largeur h, l'un de hauteur $f(x_k)$, l'autre de hauteur $f(x_{k+1})$. Ainsi l'intégrale $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre $hf(x_k)$ et $hf(x_{k+1})$.
Pour obtenir un encadrement de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, il suffit donc de sommer les aires des rectangles inférieurs et celles des rectangles supérieurs.
On obtient donc l'algorithme suivant dans lequel u représente l'aire « inférieure » et v l'aire « supérieure ».

Saisir a, b, n
$h \leftarrow \frac{b-a}{n}$
$x \leftarrow a$
$u \leftarrow 0$
$v \leftarrow 0$
Pour k de 0 à $n-1$
  $u \leftarrow u + hf(x)$
  $x \leftarrow x + h$
  $v \leftarrow v + hf(x)$
Fin Pour
Afficher u, v



2. Primitives d'une fonction continue

❖ Théorème fondamental

Théorème 1. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ de dérivée f.
Autrement dit, $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a;b]$.

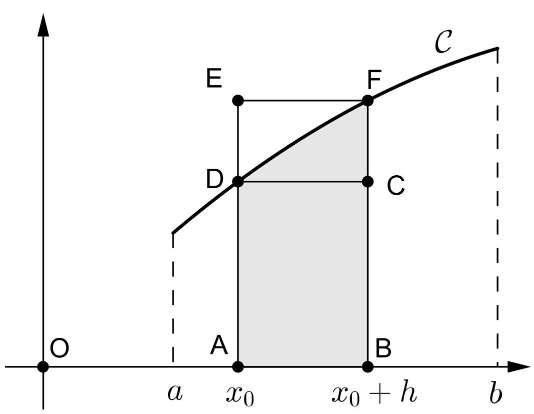
Démonstration. Prouvons ce théorème dans le cas où f est croissante. Soit $x_0 \in [a;b]$ et $h > 0$ un réel tel que $x_0 + h \in [a;b]$.
L'aire $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ est la différence des aires $\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$, donc

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mais cette aire est comprise entre l'aire des rectangles $ABCD$ et $ABFE$ qui sont respectivement $hf(x_0)$ et $hf(x_0+h)$, donc

$$hf(x_0) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq hf(x_0+h)$$

d'où, puisque $h > 0$,



$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0+h).$$

La fonction f étant continue, on a $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ par conséquent en passant à la limite dans l'inégalité précédente d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

De même si $h < 0$, on obtient $f(x_0+h) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$ et donc

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

On a donc prouvé que F est dérivable en x_0 avec $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

❖ Primitive d'une fonction continue

Définition. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle <u>primitive</u> de f sur I toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée est f. Ainsi $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

<u>**Exemple**</u>

La fonction $F: x \mapsto x^2$ est une primitive de $f: x \mapsto 2x$ car $F'(x) = 2x$.
La fonction $G: x \mapsto 3x$ est une primitive de $g: x \mapsto 3$ car $G'(x) = 3$. La fonction $x \mapsto 3x + 5$ est une autre primitive de g.

<u>**Exemple**</u>

Soit f la fonction inverse, définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Une primitive de f sur $]0; +\infty[$ est la fonction F_1 définie par $F_1(x) = \ln x$.
Une primitive de f sur $]-\infty; 0[$ est la fonction F_2 définie par $F_2(x) = \ln(-x)$.

D'après le théorème précédent, toute fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ admet une primitive, à savoir la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Le théorème suivant est une généralisation.

Théorème 2 (admis). Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Théorème 3.
- Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, toutes les autres primitives de f sur I sont définies par $x \mapsto F(x) + k$ où k est un réel quelconque.
- Étant donné $x_0 \in I$ et un réel y_0, il existe une unique primitive F prenant la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Démonstration.
- Soit F une primitive de f sur I (elle existe d'après le théorème 2) et soit G la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$. On a clairement $G'(x) = F'(x)$, donc G est une primitive de f sur I.
  Réciproquement, soit G une primitive de f sur I. Alors la fonction $G - F$ est dérivable sur I et $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$, d'où il résulte que la fonction $F - G$ est constante. Il existe donc un réel k tel que $G - F = k$, ou encore $G = F + k$.
- Soit G une primitive de f. Toute primitive de f est de la forme $F(x) = G(x) + k$ où k est un réel. Donc $F(x_0) = y_0 \Leftrightarrow G(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - G(x_0)$. Ainsi il existe une seule primitive F de f prenant la valeur y_0 en x_0, c'est la fonction
  $$F: x \mapsto G(x) - G(x_0) + k. \ ■$$

Exemple

La fonction $f: x \mapsto 2x$ admet pour primitive $F: x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$. Les autres primitives de f sont donc les fonctions $x \mapsto x^2 + k$, par exemple $x \mapsto x^2 - 1$, $x \mapsto x^2 + 20$, …
Cherchons l'unique primitive F valant 0 en 3. Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = x^2 + k$. Donc $F(3) = 0 \Leftrightarrow 3^2 + k = 0 \Leftrightarrow k = -9$. La primitive cherchée est $x \mapsto x^2 - 9$.

Théorème 4. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et F l'une de ses primitive. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Démonstration. D'après le théorème 3, il n'existe qu'une seule primitive de f sur $[a; b]$ s'annulant en a. Or on dispose de deux telles fonctions :

- D'après le théorème 1, $G: x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a; b]$ et de plus $G(a) = 0$.
- Si F désigne une primitive quelconque de f sur $[a; b]$, la fonction $H: x \mapsto F(x) - F(a)$ est une primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a.

Par conséquent les fonctions G et H sont égales sur $[a; b]$, c'est dire que pour tout $x \in [a; b]$, on a $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$. En particulier pour $x = b$, on a la relation voulue. ■

Notation. La quantité $F(b) - F(a)$ se note $[F(x)]_a^b$.

Exemple

Avec la calculatrice dans le paragraphe 1, nous avons vu que $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = 9$. Retrouvons ce résultat par le calcul. Si l'on pose $f(x) = x^2$, on remarque que la fonction $F(x) = \frac{x^3}{3}$ a pour dérivée f. Ainsi $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$.

3. Recherche de primitives

Par lecture inversée du tableau des dérivées, on obtient le tableau ci-dessous.

Fonction	**Une primitive**	**Intervalle de validité**
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$, n entier $\neq -1$; 0	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax + b)$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax + b)$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$

Dans ce tableau, u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	**Une primitive**	**Remarque**
$u'e^u$	e^u	
$u' \times u^n$, n entier $\neq -1$; 0	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$ si $u > 0$ sur I $\ln(-u)$ si $u < 0$ sur I	

Théorème 5.

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g, alors $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$.
- Si F est une primitive d'une fonction f et si k est un réel, alors kF est une primitive de la fonction kf.

Exemple

1. Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + 8x$. Une primitive de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto \frac{x^4}{4}$. Une primitive de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$, donc une primitive de $x \mapsto 8x$ est $x \mapsto 8 \times \frac{x^2}{2} = 4x^2$. Finalement une primitive de f est $F : x \mapsto \frac{x^4}{4} + 4x^2$.
2. Certaines fonctions admettent des primitives qu'il est difficile de déterminer. Un logiciel de calcul formel peut y aider. Par exemple la copie d'écran ci-contre de Xcas en ligne nous apprend qu'une primitive de $f(x) = \ln x$ est $F(x) = x \ln x - x$. La vérification est immédiate en dérivant $F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

   ```
   integrer(ln(x),x)
   ```
   $x\ln(x) - x$
3. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0[$ est $x \mapsto -\ln(-x)$.

4. Intégrale d'une fonction continue

On définit à présent la notion d'intégrale pour des fonctions continues de signe quelconque à partir du théorème 4.

Définition. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I (de signe quelconque) et soit a, b deux réels de I. En désignant par F une primitive de f (qui existe d'après le théorème 2), on appelle intégrale de f entre a et b le réel $F(b) - F(a)$:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Exemple

Calculons $\int_{-2}^{1} x^3\, \mathrm{d}x$. Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Par conséquent $\int_{-2}^{1} x^3\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = -\frac{15}{4}$.

Remarques.
L'intégrale ne dépend de la primitive choisie. En effet on sait que si F est une primitive de f, toute autre primitive G est de la forme $F + k$ où k est un réel. Par conséquent,

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a).$$

Théorème 6. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b, c, trois réels de I et k un réel quelconque.
1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
4. $\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ (relation de Chasles)
6. Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
7. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration. Soit F une primitive de f et G une primitive de g.
1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$.
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Une primitive de kf est kF, donc

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = (kF)(b) - (kF)(a) = k\big(F(b) - F(a)\big) = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Une primitive de $F+G$ est $f+g$, donc

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

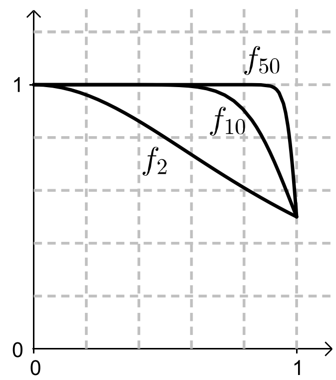
5. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.
6. Ceci résulte de la définition de l'intégrale dans le cas où f est positive.
7. On a $g(x) - f(x) \geq 0$, donc d'après (6),

$$\int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

puis d'après (4), $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, ou encore $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. ■

Remarque. Si la fonction f est positive, la relation de Chasles provient de l'additivité de l'aire.

<u>Exemple</u>



Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. On va déterminer la limite de (u_n).
Soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$. En observant la courbe de la fonction f_n pour des grandes valeurs de n, on conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
Calculons $1 - u_n$. On peut écrire $1 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$, donc

$$\begin{aligned}1 - u_n &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$0 \leq x \Rightarrow 0 \leq x^n \Rightarrow 1 \leq 1 + x^n \Rightarrow \frac{1}{1+x^n} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$$

Comme clairement $\frac{x^n}{1+x^n} \geq 0$ pour $x \geq 0$, on a finalement $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$. En intégrant, on obtient $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$. Comme $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, il vient

$$0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

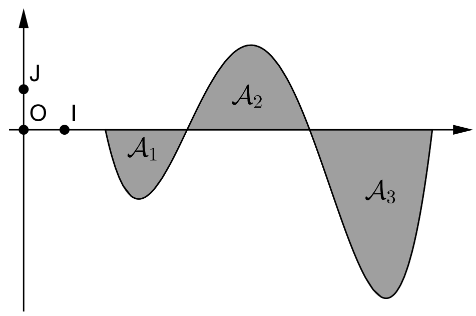
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u_n = 0$, donc finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

5. Applications

❖ Calcul d'aire

On a vu que si f est une fonction continue et positive, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Si f est continue et de signe quelconque, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique sous la courbe, c'est-à-dire que l'aire est comptée négativement si la courbe est sous l'axe des abscisses.



Ainsi sur le graphique ci-contre, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$.

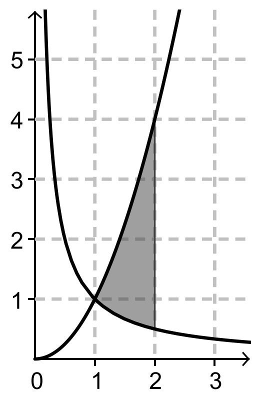
Si l'on veut la surface de l'aire colorée, il faut donc calculer $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Théorème. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $f(x) \leq g(x)$. L'aire, exprimée en unité d'aire, de la surface comprise entre les courbes représentatives de f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$\int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$.



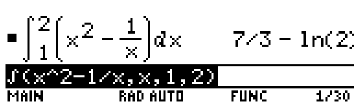
1. Montrer que pour $x \geq 1$, on a $f(x) \leq g(x)$.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre les courbes représentatives de f et g et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Réponse.

1. Pour $x \geq 1$, on a $x^2 \geq 1$ et $\frac{1}{x} \leq 1$, par conséquent $\frac{1}{x} \leq x^2$.
2. Sur $[1;2]$ on a $f(x) \leq g(x)$, donc l'aire cherchée est égale à $\mathcal{A} = \int_1^2 x^2 - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Par suite

$$\mathcal{A} = \left[\frac{x^3}{3} - \ln x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \ln 2 - \left(\frac{1}{3} - \ln 1\right) = \frac{7}{3} - \ln 2 \approx 1{,}64.$$

Il est possible de confier ce calcul à un logiciel de calcul formel.



Avec la TI-89

integrer(x^2-1/x,x,1,2)

$$-\ln(2) + \frac{7}{3}$$

Avec Xcas en ligne

❖ **Valeur moyenne d'une fonction**

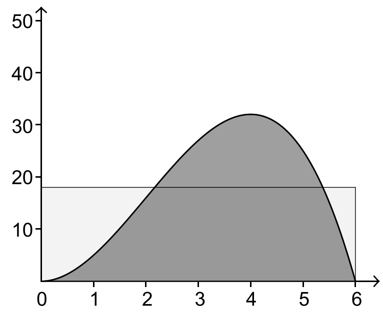
Définition. *Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ on appelle* <u>*valeur moyenne de f sur $[a;b]$*</u> *le réel défini par* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Exemple</u>

Lors d'une épidémie de grippe dans un lycée, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas est donné par la fonction

$$f(t) = 6t^2 - t^3.$$

Calculer le nombre moyen de malades par jour sur les 6 jours qu'a duré l'épidémie.



Réponse. Le nombre moyen de malade est la valeur moyenne de f, soit $\frac{1}{6-0}\int_0^6 6t^2 - t^3\,\mathrm{d}t$.

Une primitive de $6t^2 - t^3$ est $2t^3 - \frac{t^4}{4}$, donc la valeur moyenne de f est $\frac{108}{6} = 18$. Cela signifie que si le nombre d'apparitions de malades avait été constant durant l'épidémie, il aurait été de 18 par jours.