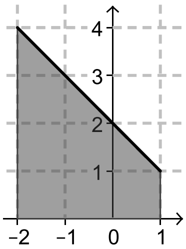
Intégration – Exercices

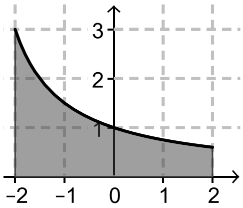
Intégrale d'une fonction positive

1 On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2;1]$ par $f(x)=-x+2$.



1. Comment s'appelle l'aire colorée sur la figure ? Comment se note-t-elle ? La calculer par lecture graphique.
2. Par lecture graphique, déterminer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

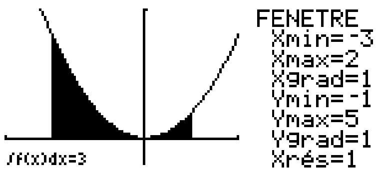
2 On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $[-2;2]$ par $f(x)=\frac{3}{x+3}$. On pose
$$I=\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



1. Déterminer par lecture graphique un encadrement de I.
2. Utiliser une calculatrice pour donner une valeur approchée à 10^{-3} près de I.
3. Vérifier que le résultat ci-contre renvoyé par un logiciel de calcul formel est cohérent avec la question **2**.

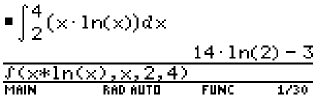
```
int(3/(x+3),x,-2,2)
                3 ln 5
```

3 On a représenté ci-contre sur l'intervalle $[-3;2]$ la fonction f définie par $f(x)=x^2$ puis on a hachuré l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x=-2$ et $x=1$.



1. À quelle intégrale correspond cette aire ? Combien vaut-elle ?
2. Obtenir le même écran sur la calculatrice avec les réglages donnés ci-dessus.

4 À l'aide de la calculatrice calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $\int_2^4 x\ln x\ \mathrm{d}x$.



Vérifier la cohérence avec l'impression d'écran du logiciel de calcul formel ci-dessus.

Primitives d'une fonction continue

5 On considère les fonctions F et G définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t$ et $G(x)=\frac{x^3}{3}$.
Montrer que $F'(x)=G'(x)$.

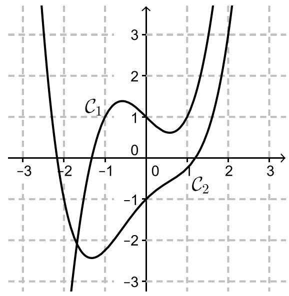
6 Dans chacun des cas suivants, démontrer que F est une primitive de f.

a. $f(x)=3x^2-6x+2$ $\qquad F(x)=x^3-3x^2+2x+1$
b. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3+\frac{1}{x}$ $\qquad F(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{x^4}{4}+\ln x$
c. $f(x)=(x-1)e^x$ $\qquad F(x)=(x-2)e^x$
d. $f(x)=xe^{-x^2}$ $\qquad F(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$
e. $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ $\qquad F(x)=\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

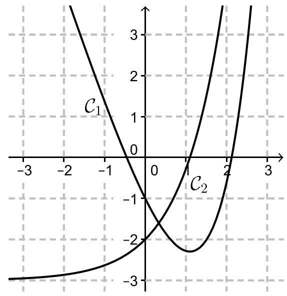
7 Vérifier que les fonctions F_1 et F_2 définies sur $]0;+\infty[$ par $F_1(x)=\ln(x)$ et $F_2(x)=\ln(3x)$ sont des primitives de la fonction inverse.
Mettre en évidence le réel k tel que $F_2(x)=F_1(x)+k$.

8 Dans chaque cas, on a représenté une fonction f et l'une de ses primitives F. Retrouver la courbe de f.

a.



b.



9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=x^2+4x+6.$$
1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$.
2. Soit F la fonction définie par $F(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2+6x$.
   a. Vérifier que la dérivée de F est f.
   b. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-3$ et $x=0$.

10 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln x$.
1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par
$$F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$$
est une primitive de f.
2. En déduire la valeur exacte de l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$.

Calcul de primitives

11 Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

a. $f(x)=2x+5$ $\qquad$ **b.** $f(x)=\frac{1}{x^2}$
c. $f(x)=x^2-\frac{1}{5}x$ $\qquad$ **d.** $f(x)=\frac{2}{5}-\frac{1}{\sqrt{x}}$
e. $f(x)=-x^3+\frac{3}{5}x^2-2$ $\qquad$ **f.** $f(x)=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}$
g. $f(x)=\frac{1}{4x}$ $\qquad$ **h.** $f(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}$
i. $f(x)=\frac{3}{2x}-\frac{4}{3x^2}$ $\qquad$ **j.** $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$
k. $f(x)=e^x+x$ $\qquad$ **l.** $f(x)=e^{-x}$
m. $f(x)=3e^{3x}+1$ $\qquad$ **n.** $f(x)=2x^2e^{x^3}$
o. $f(x)=\cos(2x)$ $\qquad$ **p.** $f(x)=\frac{1}{4}\sin(2x+1)$
q. $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ $\qquad$ **r.** $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$
s. $f(x)=\frac{x^2}{x^3+2}$ $\qquad$ **t.** $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$
u. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ $\qquad$ **v.** $f(x)=\frac{8x}{\sqrt{2x^2+1}}$
w. $f(x)=x(x^2+1)^3$ $\qquad$ **x.** $f(x)=\frac{1}{(2x-1)^2}$

12 Déterminer la primitive des fonctions suivantes qui prend la valeur 1 en 0.

a. $f(x)=2x+4$ $\qquad$ **b.** $f(x)=1-x^2$
c. $f(x)=e^{-x}-x^2$ $\qquad$ **d.** $f(x)=\sin x\cos^2 x$
e. $f(x)=\frac{2}{x+2}-1$ $\qquad$ **f.** $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2 x$.
1. Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.
2. Déterminer les primitives de f.
3. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

Intégrale d'une fonction continue

14 Calculer les intégrales suivantes.

a. $I = \int_{-1}^{3} 4x \, \mathrm{d}x$ **b.** $I = \int_{0}^{3} e^{-x} \, \mathrm{d}x$

c. $I = \int_{2}^{4} \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ **d.** $I = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+3} \, \mathrm{d}x$

e. $I = \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \, \mathrm{d}x$ **f.** $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$

g. $I = \int_{1}^{0} \frac{2}{\sqrt{3x+1}} \, \mathrm{d}x$ **h.** $I = \int_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+3} \, \mathrm{d}x$

i. $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x$ **j.** $I = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x$

15 On pose $J = \int_{2}^{4} \frac{2x-1}{x-1} \, \mathrm{d}x$.
1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \neq 1$, $\frac{2x-1}{x-1} = a + \frac{b}{x-1}$.
2. En déduire la valeur de J.

16 Soit f une fonction définie et continue sur $[-3;5]$ admettant le tableau de variation suivant.

x	-3		1		3		5
f	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	-3

1. Déterminer le signe de $\int_{-3}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x$.
2. On donne $f(4) = 0$. Donner le signe de $\int_{5}^{4} f(x) \, \mathrm{d}x$.
3. Donner un encadrement de $\int_{-3}^{3} f(x) \, \mathrm{d}x$.

17 Soit f définie sur $[-1;0]$ par $f(x) = \frac{3x+4}{(x+2)^2}$.
1. Dresser le tableau de variations de f et en déduire un encadrement de f sur $[-1;0]$.
2. Soit $I = \int_{-1}^{0} f(x) \, \mathrm{d}x$. Montrer que $1 \leq I \leq \frac{9}{8}$.
3. Vérifier que pour tout $x \in [-1;0]$, $f(x) = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$ et en déduire la valeur exacte de I.

18 Vrai ou faux ? Justifier.

Soit $A = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} t \sin^2 t \, \mathrm{d}t$ et $B = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} t \cos^2 t \, \mathrm{d}t$.

a. $A > B$ **b.** $A + B = \frac{\pi^2}{32}$ **c.** $\frac{\pi^2}{64} \leq B \leq \frac{\pi^2}{32}$

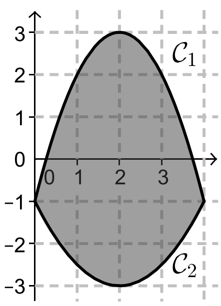
19 Étudier le signe de $x^2 - 4x + 3$ et en déduire la valeur de $\int_{1}^{5} |x^2 - 4x + 3| \, \mathrm{d}x$ à l'aide de la relation de Chasles.

Calculs d'aires

20 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

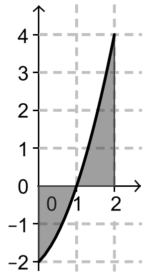
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$$
$$\text{et } g(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

On a représenté ci-contre les courbes de f et g sur $[0;4]$.



1. Associer chaque fonction à sa courbe.
2. Montrer que pour tout réel $x \in [0;4]$, $g(x) - f(x) \geq 0$.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
4. En déduire l'aire du domaine coloré.

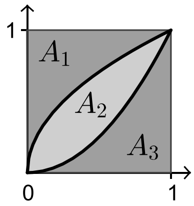
21 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 2$.
1. Étudier le signe de f.
2. En déduire l'aire du domaine grisé ci-contre.



22 On considère les fonctions f, g, h définies sur $[0;1]$ par

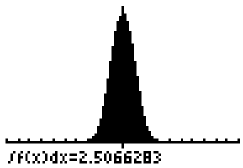
$$f(x) = x^2, \ g(x) = \sqrt{x} \text{ et } h(x) = 1.$$

On a représenté f et g sur le graphique ci-contre.

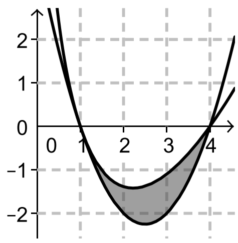


1. Justifier que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
2. Exprimer chacune des aires A_1, A_2, A_3 à l'aide d'intégrales et des fonctions f, g, h.
3. Montrer que la fonction G définie par $G(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de g.
4. En déduire que $A_1 = A_2 = A_3$.

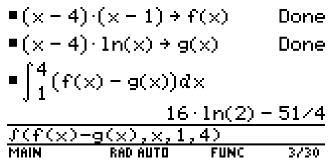
23 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$.
1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer son maximum.
2. Tracer la courbe de f sur la calculatrice et calculer $I = \int_{-10}^{10} f(x) \, \mathrm{d}x$.
3. Comparer cette valeur à $\sqrt{\pi}$.



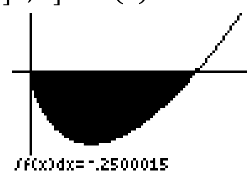
24 On considère les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par
- $f(x) = (x-4)(x-1)$
- $g(x) = (x-4)\ln x$.



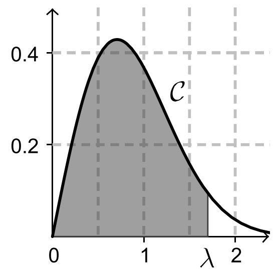
1. Démontrer que les courbes de f et g admettent la même tangente au point d'abscisse 1.
2. On pose $\varphi(x) = x - 1 - \ln x$.
   a. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\varphi(x) \geq 0$.
   b. Montrer que $f(x) - g(x) = (x-4)\varphi(x)$.
   c. En déduire la position relative des courbes de f et g.
   d. À l'aide de l'impression d'écran ci-contre déterminer la valeur exacte de l'aire colorée.
   Retrouver la valeur approchée à l'aide de la calculatrice.



25 On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x \ln x$ pour $x \in]0;1]$ et $f(0) = 0$.
1. Justifier que f est continue sur $[0;1]$.
2. Montrer que la fonction F définie sur $[0;1]$ par
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \text{ si } x \in]0;1] \text{ et } F(0) = 0$$
est une primitive de f sur $[0;1]$.
3. En déduire la valeur de $\int_{0}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x$. Utiliser la calculatrice pour retrouver ce résultat par un calcul d'aire.



26 f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=xe^{-x^2}$ et $\mathcal{C}$ désigne sa courbe dans un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm en abscisse et 5 cm en ordonnées.

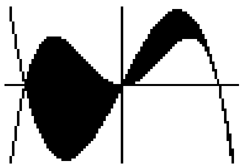


Soit λ un réel positif.

1. Calculer l'aire $A(\lambda)$ comprise entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=\lambda$.
2. Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$ et interpréter graphiquement.

27 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x^2(x^2-1)$$
$$g(x)=x(1-x^2)$$



1. Étudier la position relative des courbes de ces fonctions.
2. En déduire l'aire du domaine compris entre ces deux courbes sur l'intervalle $[-1;1]$.

Encadrements et suites d'intégrales

28 Pour $n\geq 0$ on pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\sin x\ \mathrm{d}x$.

Montrer que $0\leq I_n\leq\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$, en déduire la limite de (I_n).

29 On définit pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ \mathrm{d}x$.

1. Étudier les variations de (I_n).
2. Montrer que (I_n) est convergente.

30 On définit pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^1(1-t)^n e^t\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que (I_n) est décroissante.
2. Prouver que (I_n) est minorée. Qu'en déduit-on ?
3. **a.** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0;1]$, on a
$$(1-t)^n e^t\leq e(1-t)^n.$$
   b. En déduire que $I_n\leq\frac{e}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   c. Déterminer alors la limite de (I_n).

31 *(2010, Liban).* On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=\int_0^1\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\ \mathrm{d}x$.

1. **a.** Montrer que $u_0+u_1=1$.
   b. Calculer u_1. En déduire u_0.
2. Montrer que pour tout $n\geq 0$, on a $u_n\geq 0$.
3. **a.** Montrer que pour tout $n\geq 1$, $u_{n+1}+u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,
$$u_n\leq\frac{1-e^{-n}}{n}.$$
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

32 **(Constante d'Euler)** *(2005, métropole).*
Pour tout entier $n\geq 1$, on pose
$$H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\text{ et }u_n=H_n-\ln n.$$

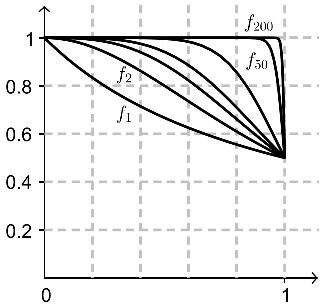
1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel k non nul
$$\frac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x\leq\frac{1}{k}.$$
   b. En déduire que, pour tout entier $n\geq 2$, on a
$$H_n-1\leq\ln n\leq H_n-\frac{1}{n}\text{ et }0\leq u_n\leq 1.$$
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel $n\geq 1$,
$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x.$$
   b. En déduire le sens de variations de (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) converge. On note γ la limite de la suite (u_n) (on ne cherchera pas à calculer γ).
Quelle est la limite de la suite (H_n) ?

33 Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.

1. Prouver que $f'(x)=\frac{1-2x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)}$ puis étudier les variations de f.
2. Montrer que $f(x)\leq\frac{1}{2x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

34 *(2014, Asie).* Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par $f_n(x)=\frac{1}{1+x^n}$. Pour tout entier $n\geq 1$, on définit le nombre I_n par $I_n=\int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\ \mathrm{d}x$.

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-contre.
En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.



2. Calculer la valeur exacte de I_1.
3. **a.** Démontrer que, pour tout réel $x\in[0;1]$ et pour tout entier naturel $n\geq 1$, on a $\frac{1}{1+x^n}\leq 1$.
   b. En déduire que, pour tout entier $n\geq 1$, on a $I_n\leq 1$.
4. Démontrer que, pour tout $x\in[0;1]$ et pour tout entier $n\geq 1$, on a $1-x^n\leq\frac{1}{1+x^n}$.
5. Calculer l'intégrale $\int_0^1(1-x^n)\ \mathrm{d}x$.
6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.
7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels
	x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0
Traitement :	Demander un entier $n\geq 1$
	Demander un entier $p\geq 1$
	Pour k allant de 0 à $p-1$ faire :
	x prend la valeur $\frac{k}{p}$
	I prend la valeur $I+\frac{1}{1+x^n}\times\frac{1}{p}$
	Fin Pour
	Afficher I

   a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n=2$ et $p=5$?
On justifiera la réponse en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

   b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

Problèmes, sujets de baccalauréat

35 **(Problème des chapeaux)**

Lors d'une soirée, n personnes déposent leurs chapeaux au vestiaire. À la sortie survient une panne de lumière et chacun récupère un chapeau au hasard.

On note p_n la probabilité que personne ne récupère son chapeau.

On pose $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$ pour $n \geq 1$ et $0! = 1$.

1. On pose $p_0 = 1$. Calculer p_1, p_2.

2. On suppose $n \geq 2$ et on numérote 1, 2, …, n les personnes.

- **a.** Soit A l'événement « personne ne retrouve son chapeau ». Si A est réalisé la personne 1 a par exemple pris le chapeau de 2. Soit alors B l'événement « 2 a pris le chapeau de 1 ». En utilisant ces événements et la formules des probabilités totales montrer que
$$p_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) p_{n-1} + \frac{1}{n} p_{n-2}.$$
- **b.** On pose $u_n = p_n - p_{n-1}$ pour $n \geq 2$
Démontrer que $u_n = -\frac{1}{n} u_{n-1}$ et en déduire pour tout $n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.
- **c.** En déduire que pour tout $n \geq 0$ on a
$$p_n = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

3. On s'intéresse à présent à la limite de la suite (p_n). On pose $v_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^x \, dx$ pour $n \geq 0$.

- **a.** En dérivant $\varphi(t) = t^n e^t$ montrer que pour $x \in \mathbb{R}$,
$$x^n e^x = \int_0^x t^n e^t \, dt + \int_0^x n\, t^{n-1} e^t \, dt$$
et en déduire que $v_n = \frac{e}{n!} - v_{n-1}$ pour $n \geq 1$.
- **b.** En déduire par récurrence $v_n = (-1)^n (e p_n - 1)$ pour tout $n \geq 0$.
- **c.** En majorant $x \mapsto x^n e^x$ sur $[0; 1]$, montrer que $0 \leq v_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$.
- **d.** En déduire que $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{e}$.

36 **(Intégrales impropres)**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a; b]$. Pour $x \in]a; b]$ on pose $I(x) = \int_x^b f(t) \, dt$.

1. Justifier l'existence de $I(x)$.

Lorsque $\lim_{x \to a^+} I(x)$ existe et est finie, on dit que la fonction f est intégrable sur $]a; b]$ et on appelle intégrale impropre de f sur $]a; b]$ le réel $\lim_{x \to a^+} I(x)$ que l'on note $\int_a^b f(t) \, dt$.

2. Montrer que si f est continue sur $[a; b]$, on retrouve la notion habituelle d'intégrale.

3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.

4. Montrer pour $x \geq 1$, $\int_x^1 \ln t \, dt = x - x \ln x - 1$.
À l'aide d'une limite du cours, prouver alors que ln est intégrable sur $]0; 1]$ et que $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$.

37 *(2010, Polynésie).* **Partie A**

1. On considère la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$.

- **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1; +\infty[$ une unique solution notée α.
- **b.** Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.
On appelle (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormé.

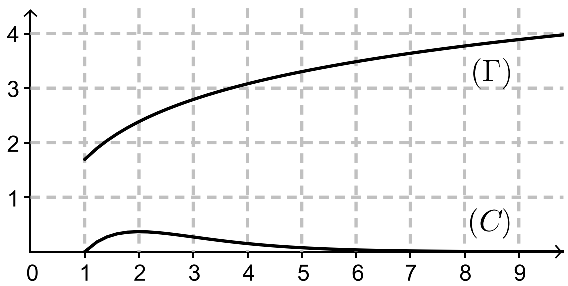
- **a.** En utilisant la courbe (Γ), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.
- **b.** Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3.$$
- **c.** [1]En déduire que (u_n) converge.

Partie B – On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = (x-1)e^{1-x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :
$$F(x) = \int_1^x f(t) \, dt = \int_1^x (t-1)e^{1-t} \, dt.$$

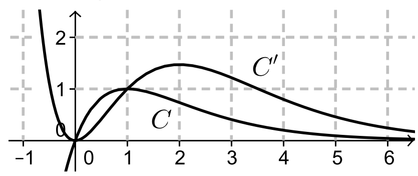
- **a.** Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1; +\infty[$.
- **b.** Montrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$ on a
$$F(x) = -x e^{1-x} + 1.$$
- **c.** Démontrer que sur $[1; +\infty[$, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x) + 1 = x$.

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.
Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, de D_a, soit égale à $\frac{1}{2}$ et hachurer D_a sur le graphique.



38 *(2011, centres étrangers).* Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x e^{1-x} \text{ et } g(x) = x^2 e^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont respectivement notées C et C'. Leur tracé est donné ci-dessus.



1. **Étude des fonctions f et g**

- **a.** Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.
- **b.** Justifier le fait que f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.
- **c.** Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.

2. **Calcul d'intégrales**

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx$.

- **a.** Calculer la valeur exacte de I_0.
- **b.** [2]Prouver que tout entier naturel n, on a
$$(n+1)I_n - I_{n+1} = 1.$$
- **c.** En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.

---

[1] La question initiale demandait de prouvait que (u_n) converge vers α mais un théorème a disparu du programme…

[2] Indication : dériver $\varphi(x) = x^{n+1} e^{1-x}$.

3. **Calcul d'une aire plane**
   a. Étudier la position relative des courbes C et C'.
   b. On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre les courbes C et C', et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. En exprimant A comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité : $A = 3 - e$.
4. **Étude de l'égalité de deux aires**
   Soit a un réel strictement supérieur à 1.
   On désigne par $S(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de-la partie du plan comprise entre les courbes C et C' et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$. On admet que $S(a)$ s'exprime par $S(a) = 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1)$.
   L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires A et $S(a)$ sont égales.
   a. Démontrer que l'équation $S(a) = A$ est équivalente à l'équation : $e^a = a^2 + a + 1$.
   b. *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.

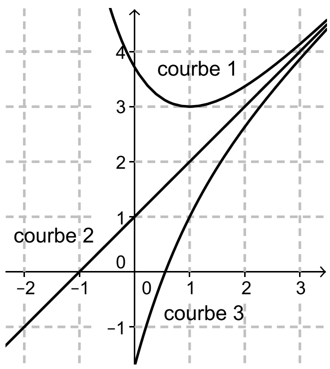
39 *(2013, Antilles-Guyane).* Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A – Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = (x + 1)e^x$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x + 2)e^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B – On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :
$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$$
et on note C_m la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1. a. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
   b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe C_m avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté ci-contre les courbes C_0, C_e, C_{-e} (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).
   Identifier chacune de ces courbes sur le graphique en justifiant.

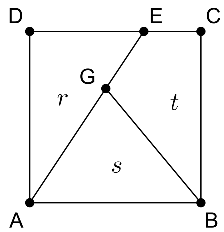


3. Étudier la position de la courbe C_m par rapport à la droite D d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.
4. a. On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes C_e, C_{-e} , l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur le graphique.
   b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre C_e, C_{-e}, l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire. Démontrer que pour tout réel a positif
   $$\mathcal{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}.$$
   En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

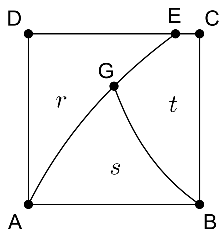
40 *(2015, centres étrangers).*
Les parties A et B sont indépendantes
Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise.
Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré $ABCD$, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C1 et C2 suivantes :

- Condition C1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes :
  – une des lignes est le segment $[AD]$;
  – une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment $[DC]$;
  – la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne.
- Condition C2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre 0,3 et 0,4, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées r, s, t sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Partie A – Étude de la proposition A.
Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \frac{1}{3}$.
Déterminer les coordonnées des points E et G.

Partie B – Étude de la proposition B
Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :

- la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x > 0$ par : $f(x) = \ln(2x + 1)$;
- la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par : $g(x) = k\left(\frac{1-x}{x}\right)$, où k est un réel positif qui sera déterminé.

1. a. Déterminer l'abscisse du point E.
   b. Déterminer la valeur du réel k, sachant que l'abscisse du point G est égale à 0,5.
2. a. Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel x > 0 par :
   $$F(x) = (x + 0{,}5) \times \ln(2x + 1) - x.$$
   b. Démontrer que $r = \frac{e}{2} - 1$
3. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que $s = (\ln 2)^2 + \frac{\ln 2 - 1}{2}$.
   La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?