Lois de probabilité à densité – Exercices

Loi à densité

1 X est une variable aléatoire à densité à valeur dans $[2;8]$. On donne $P(X<6)=0{,}3$. Calculer

a. $P(X=6)$ **b.** $P(X\leq 6)$
c. $P(X>6)$ **d.** $P(6\leq X\leq 10)$

2 X est une variable aléatoire à densité sur $[3;12]$. On donne $P(X\leq 5)=0{,}2$ et $P(X>8)=0{,}3$. Calculer

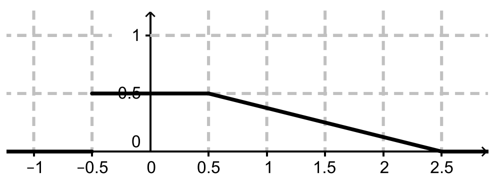
a. $P(X\geq 5)$ **b.** $P(X\geq 12)$
c. $P(X<8)$ **d.** $P(5\leq X<8)$

3 Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=x+\frac{1}{2}$.

1. Représenter graphiquement f et vérifier que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire à densité à valeurs dans $[0;1]$ dont la densité est f. Calculer
  a. $P(0{,}2<X<0{,}7)$ **b.** $P(X<0{,}3)$
  c. $P\left(X>\frac{3}{4}\right)$ **d.** $E(X)$

4 La courbe ci-dessous représente la densité f d'une variable aléatoire à densité à valeurs dans $[-0{,}5;2{,}5]$.

1. S'assurer que f est une densité.
2. Calculer
  a. $P(X>0)$ **b.** $P(-1\leq X<0{,}5)$
  c. $P(X\geq 0{,}5)$ **d.** $P(1\leq X<1{,}5)$
3. Montrer que $E(X)=\frac{7}{12}$.



5 Soit f la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{2}{x^2}.$$

1. Montrer que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer
  a. $P(X=10)$ **b.** $P(X<10)$ **c.** $P(X>10)$
  d. $P(X<1)$ **e.** $P(4\leq X\leq 5)$

6 Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+1) \text{ si } -1\leq x<1\\ -\frac{2}{3}x+\frac{4}{3} \text{ si } 1\leq x\leq 2\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f et vérifier que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
  a. Calculer la probabilité que X prenne ses valeurs dans l'intervalle $[-1;0]$.
  b. Calculer $P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq\frac{3}{2}\right)$.

Loi uniforme

7 X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-3;5]$. Calculer

a. $P(X>-1)$ **b.** $P(X=0)$
c. $P(1\leq X\leq 7)$ **d.** $P(X>-4)$

8 X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[1;3]$.

1. Calculer
  a. $P(1<X<2)$ **b.** $P(1{,}5\leq X\leq 2{,}5)$
  c. $P(X>2)$ **d.** $P(2{,}3<X<3{,}7)$
  e. $P(X<3)$ **f.** $P(X<0)$
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $P(X>k)$ en fonction de k.
4. Déterminer k tel que $P(X>k)=0{,}65$.

9 Deux amis se téléphonent régulièrement. La durée d'une communication suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;60]$.

1. Quelle est la probabilité que la communication n'excède pas 20 minutes ?
2. Sachant qu'une communication dure depuis 20 minutes, quelle est la probabilité qu'elle n'excède pas 30 minutes ?
3. Calculer la durée moyenne d'une communication.

Loi exponentielle

10 La durée de vie T, exprimée en jours, d'un composant est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}005$.

1. Calculer à 10^{-3} près la probabilité des événements suivants :
  a. la durée de vie dépasse 300 jours ;
  b. la durée de vie est d'au plus une année ;
  c. la durée de vie est comprise entre 1 et 2 ans.
2. Calculer la durée de vie moyenne d'un composant.

11 La durée de vie T, exprimée en année, d'un composant est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$. Une étude statistique a permis d'estimer que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675.

1. Calculer λ à 10^{-3} près.
2. Calculer à 10^{-3} près la probabilité qu'un composant de ce type dure :
  a. moins de 8 ans ;
  b. plus de 10 ans ;
  c. entre 3 et 5 ans
  d. au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne encore au bout de 3 ans.

12 Le temps de réponse T, exprimée en seconde, à un terminal commandé par un ordinateur est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ telle que $P(T\geq 3)=0{,}452$.

1. Le temps de réponse dépasse 2 secondes. Quelle est la probabilité qu'il dépasse 5 secondes ?
2. Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, que le temps de réponse ne dépasse pas 5 secondes.

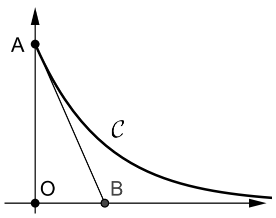
13 Cet exercice est un QCM. Chaque question comporte trois réponses, une seule est exacte. Indiquer laquelle en justifiant.
On s'intéresse à la durée de vie notée T, exprimée en année, d'un appareil ménager avant la première panne.
On modélise cette situation en considérant que la variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

1. Pour tout $t>0$, la valeur de $P(T\in[t;+\infty[)$ est
  a. $1-e^{-\lambda t}$ **b.** $e^{-\lambda t}$ **c.** $1+e^{-\lambda t}$

2. Le nombre t tel que $P(T \in [0;t[) = P(T \in [t;+\infty[)$ est
   a. $\frac{\ln 2}{\lambda}$ **b.** $\frac{\lambda}{\ln 2}$ **c.** $\frac{\lambda}{2}$
3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors
   a. $\ln\frac{50}{41}$ **b.** $\ln\frac{41}{50}$ **c.** $\frac{\ln 82}{\ln 100}$
4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est
   a. $P(T \in [1;+\infty[)$ **b.** $P(T \in [3;+\infty[)$
   c. $P(T \in [2;3])$
   Dans la suite on prendra $\lambda = 0{,}2$.
5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années est
   a. 0,5523 **b.** 0,5488 **c.** 0,4512
6. Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. X est la variable aléatoire qui désigne le nombre d'appareils qui n'ont pas eu de panne au cours des trois premières années. La valeur de $P(X = 4)$ est
   a. 0,5555 **b.** 0,8022 **c.** 0,1607

14 **(Désintégration radioactive).** En physique, on considère que la durée de vie totale T d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement, autrement dit une loi exponentielle de paramètre λ. Ce réel λ est appelé constante radioactive de l'élément étudié.

1. On suppose qu'à l'instant initial, l'échantillon radioactif contient N_0 noyaux actifs. Justifier que le nombre d'éléments présents à l'instant t est $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.
2. La demi-vie d'un élément radioactif est la durée notée $t_{1/2}$ telle que $P\left(T \leq t_{1/2}\right) = P\left(T > t_{1/2}\right)$.
   a. Montrer que $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Vérifier que la demi-vie correspond au temps nécessaire pour que la moitié des noyaux d'un échantillon se soient désintégrés.
   b. Après deux demi-vies, quel est le nombre moyen d'atomes non désintégrés ?
3. La durée de vie moyenne, notée τ, d'un élément radioactif est l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire de la durée de vie T.
   a. Exprimer τ en fonction de λ. Justifier l'approximation utilisée en physique : $\tau \approx 1{,}44 t_{1/2}$.
   b. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la densité f d'une loi exponentielle de paramètre λ. La tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en B. Montrer que l'abscisse de B est τ.



4. Applications.
   a. Le technétium 99m ($^{99\text{m}}$Tc) a une demi-vie de 6 heures. Calculer sa constante radioactive.
   b. Calculer à 10^{-3} près la probabilité d'un atome de $^{99\text{m}}$Tc se désintègre :
      i. avant 4 heures ; **ii.** après 10 heures.
   c. À partir de quelle durée de vie peut-on considérer que la probabilité qu'un atome de $^{99\text{m}}$Tc se désintègre est supérieure à 0,95 ?
   d. La demi-vie du carbone 14 est estimée à 5568 ans.
      i. Calculer $P(T < 1000)$.
      ii. Déterminer, à un an près, le plus petit temps t tel que $P(T < t) = 0{,}2$.

Loi normale $\mathcal{N}(0;1)$

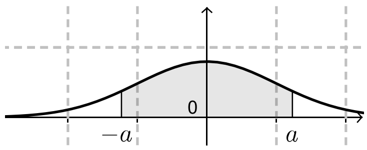
Dans ce paragraphe, X désigne une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. On arrondira à 10^{-3} près si nécessaire.

15 Calculer
a. $P(0{,}3 \leq X \leq 1{,}2)$ **b.** $P(-0{,}5 \leq X < 0)$
c. $P(-100 < X < 100)$ **d.** $P(0 < X < 97{,}3)$

16 Calculer
a. $P(X < 0)$ **b.** $P(X \leq 1)$
c. $P(X > -0{,}23)$ **d.** $P(X < -0{,}5)$
e. $P(X \leq 3{,}14)$ **f.** $P(X > 1{,}45)$
g. $P(X \geq 8)$ **h.** $P(X < 50)$

17 Déterminer le réel k tel que
a. $P(X < k) = 0{,}2$ **b.** $P(X \leq k) = 0{,}7$
c. $P(X \geq k) = 0{,}95$ **d.** $P(-k \leq X \leq k) = 0{,}95$

18 La courbe de la densité de la loi normale est représentée ci-contre. Déterminer le réel a sachant que l'aire colorée vaut 0,78.



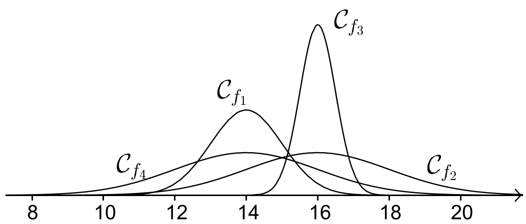
19 Soit f la densité de X, On rappelle qu'elle est définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
1. Tracer f sur la calculatrice.
2. En utilisant la calculatrice calculer $\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $P(-2 \leq X < 3)$. Expliquer.
3. Calculer $\int_{-100}^{100} f(x)\,\mathrm{d}x$. Expliquer.
4. Calculer $\int_{-100}^{100} x f(x)\,\mathrm{d}x$. Expliquer.

Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

20 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(10;9)$. Calculer
a. $P(8 < X \leq 11)$ **b.** $P(X \geq 10)$
c. $P(0 \leq X \leq 20)$ **d.** $P(X \leq 13)$
e. $P(X < 12)$ **f.** $P(X > 13)$

21 Le délai de livraison d'une pièce, en jours, suit la loi normale $\mathcal{N}(20;25)$. Quelle est la probabilité pour le délai de livraison soit
1. compris entre 18 et 23 jours ?
2. supérieur à 30 jours ?
3. inférieur à 15 jours ?

22 On a représenté les densités f_1, f_2, f_3, f_4 de variables aléatoire suivant des lois normales.



Associer à chaque densité ses paramètres
a. $\mu = 14$ et $\sigma = 1$ **b.** $\mu = 16$ et $\sigma = 0{,}5$
c. $\mu = 16$ et $\sigma = 2$ **d.** $\mu = 14$ et $\sigma = 2$

23 En France, la température moyenne en degré Celsius d'une journée d'octobre suit la loi normale de paramètres $\mu = 15$ et $\sigma = 3$.
Répondre aux questions suivantes sans calculatrice.

1. Déterminer la probabilité que lors d'une journée d'octobre la température soit comprise entre 12° et 18°.
2. Deux personnes vont se marier un samedi d'octobre. Elles espèrent que la température sera supérieure à 18° sans dépasser les 21°. Que peut-on leur dire ?

24 La quantité d'eau contenue dans une bouteille d'une certaine marque, exprimé en litres, suit la loi normale d'espérance 1 et d'écart-type 0,02. On choisit au hasard une bouteille de cette marque.

1. Quelle est la probabilité que cette bouteille contienne exactement un litre ?
2. Sans calculatrice, préciser la probabilité que cette bouteille contienne entre 0,96 et 1 L.
3. Calculer la probabilité que la bouteille contienne entre 0,97 et 1,02 L.

25 À jeun, la glycémie, taux de sucre dans le sang exprimé en grammes par litre, suit la loi normale de paramètres $\mu = 1{,}03$ et $\sigma = 0{,}115$.

1. Préciser la probabilité d'avoir un taux de glycémie normal, c'est-à-dire compris entre 0,8 et 1,26 g.L^{-1}.
2. L'hyperglycémie correspond à une glycémie supérieure à 1,26 g.L^{-1}. Quelle est la probabilité d'en souffrir ?

26 Les scores en saut en hauteur X d'un groupe de 600 filles définissent une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(115; 100)$. Les scores Y d'un groupe de 800 garçons définissent une variable aléatoire suivant un loi normale $\mathcal{N}(130; 225)$.

1. Estimer le nombre de filles dont le score est supérieur à la moyenne des garçons.
2. Estimer le nombre de garçons dont le score est inférieur à la moyenne des filles.

Usage de « FracNormale »

27 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(1; 0{,}04)$. Déterminer le réel k tel que

a. $P(X < k) = 0{,}895$ **b.** $P(X \geq k) = 0{,}895$
c. $P(X \leq k) = 0{,}01$ **d.** $P(X \leq k) = 0{,}999$

28 Une étude effectuée par un chercheur a montré que l'âge, en mois, au cours duquel apparaissent les premiers mots de vocabulaire chez les enfants suit la loi normale $\mathcal{N}(11{,}5; 3{,}2)$.

1. Déterminer le taux d'enfants n'ayant pas encore prononcé leurs premiers mots de vocabulaire au bout de 13 mois.
2. Déterminer à quel âge 25 % des enfants n'ont pas encore prononcé leurs premiers mots.

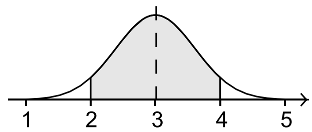
29 Un producteur commercialise des kiwis pour la grande distribution si leur masse est comprise entre 85 et 95 grammes. On admet que la variable aléatoire qui à chaque kiwi associe sa masse suit une loi $\mathcal{N}(90; 9)$.

1. Combien de fruits seront commercialisés en moyenne sur 10 000 kiwis ?
2. Déterminer le plus petit intervalle I centré autour de 90 tel que $P(X \in I) \geq 0{,}995$.

30 Une usine commercialise de la farine en sachets. La variable aléatoire X qui à chaque sachet choisi au hasard associe sa masse en gramme suit une loi normale $\mathcal{N}(1020; 6{,}25)$.

1. Quelle est à 10^{-4} près la probabilité qu'un sachet pèse plus de 1025 grammes ?
2. Déterminer le plus petit poids de sachet (en nombre entier) qui est tel que au moins 6 % des sachets fabriqués soient plus légers que lui.
3. Quel est le plus grand poids de sachet (en nombre entier) qui est tel que au moins 6 % des sachets fabriqués soient plus lourds que lui ?

31 On a représenté ci-contre la densité d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.
Déterminer μ et σ sachant que l'aire colorée vaut 0,9.



32 Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(30; \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$. Déterminer σ pour que

a. $P(X \leq 35) = 0{,}92$;
b. $P(26 \leq X \leq 34) = 0{,}68$;

Théorème de Moivre-Laplace

33 On lance 180 fois un dé équilibré cubique et on note X le nombre d'apparition de la face 6. Calculer à 10^{-3} :

a. $P(X \geq 34)$ **b.** $P(X \leq 22)$ **c.** $P(25 \leq X \leq 34)$

34 Un générateur de nombre au hasard génère une succession de 100 chiffres de 0 à 9, les chiffres étant équiprobables. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'apparition du 9.
Calculer $P(8 < X \leq 11)$ à 10^{-3} près.

35 Une entreprise emploie 500 personnes qui déjeunent dans l'une des deux cantines avec une probabilité égale de manger à la première ou à la seconde. Si le gérant veut avoir une probabilité supérieure à 95 % de disposer d'assez de couverts, combien devra-t-il en prévoir au minimum pour chacune des deux cantines ?

1. Soit X le nombre de personne mangeant à la première cantine. Quelle est la loi de X ?
2. Montrer que le problème revient à déterminer le plus petit entier k tel que $P(500 - k \leq X \leq k) \geq 0{,}95$.
3. En utilisant le théorème de Moivre-Laplace, en déduire la valeur de k.

36 (Surréservation aérienne). Il arrive assez souvent que le nombre de réservations pour une liaison aérienne soit supérieur au nombre de passagers se présentant effectivement le jour du vol. Cela est dû à des empêchements imprévisibles de certains passagers et à une politique systématique de certains d'entre eux qui réservent des places sur plusieurs vols de façon à choisir au dernier moment celui qui leur convient le mieux (en raison de la concurrence, les compagnies ne pénalisent pas les clients qui se désistent et ne font payer effectivement que ceux qui embarquent). Pour compenser ce phénomène, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (surbooking) en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations.

S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

1. On considère que les passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 10 %. On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et X_n le nombre (aléatoire) de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol.
   Donner la loi de X_n, son espérance, sa variance.
2. Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaître la valeur maximale de n telle que
   $$P(X_n \leq 300) \geq 0{,}99.$$
   En utilisant le théorème de Moivre-Laplace, proposer une solution approchée de ce problème.

Sujets de baccalauréat

37 *(2013, Nouvelle-Calédonie).* Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au dix-millième.

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres. Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

1. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.
   On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,4.
   Montrer qu'une valeur approchée à 0,0001 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,0124. On pourra utiliser la table de valeurs donnée ci-contre.

d	$P(X \leq d)$
0	3,06E-138
1	2,08E-112
2	2,75E-89
3	7,16E-69
4	3,67E-51
5	3,73E-36
6	7,62E-24
7	3,19E-14
8	2,87E-07
9	0,00620967
10	0,5
11	0,99379034
12	0,99999971
13	1
14	1
15	1
16	1
17	1
18	1

2. On met en place un contrôle de production tel que 98 % des billes hors norme sont écartées et 99 % des billes correctes sont conservées.
   On choisit une bille au hasard dans la production. On note N l'évènement : « la bille choisie est aux normes », A l'évènement : « la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».
   a. Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement A.
   c. Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

Partie B – Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.

On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de 0,0124.

On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.

On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?
2. Quelles sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?
4. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

38 *(2015, Liban).*
Les probabilités seront arrondies au dix millième.
Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A – L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée.
Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.
Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas. On choisit une date au hasard en période scolaire et on note

- V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo » ;
- B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » ;
- R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192.
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B – Le vélo. On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée.
Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit le loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}2$.

1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
2. Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?
3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C – Le bus. Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.
On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.
On note Z' la variable aléatoire égale à $\frac{T'-15}{\sigma'}$.

1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.