Produit scalaire dans l'espace

1. Produit scalaire dans l'espace

Définition. *Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant la même origine A. Il existe au moins un plan contenant les points A, B, C. On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.*

Théorème. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

Théorème (bilinéarité du produit scalaire). Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel. On a
1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ (linéarité à gauche) ;
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ (linéarité à droite).
3. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.

Théorème. Soit A, B, C trois points de l'espace et H le projeté orthogonal de B sur (AC). Alors

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens ;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AH \times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.

Théorème. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

En particulier pour tout point A, B, C avec $A \neq B$ et $A \neq C$ on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

Théorème. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Définition. *Deux vecteurs sont dits <u>orthogonaux</u> si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

Propriété. Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2. Vecteur normal à un plan

Démontrons un résultat énoncé dans le précédent chapitre de géométrie dans l'espace.

Théorème. Une droite (d) est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de ce plan.

Démonstration (exigible). Si (d) est orthogonale à toute droite du plan P, alors elle est orthogonale à (d_1) et (d_2).
Réciproquement, si $\vec{u}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont des vecteurs directeurs des droites (d), (d_1) et (d_2) alors $\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$ puisque (d) est orthogonale à (d_1) et (d_2).
Soit Δ une droite de P et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.
Les droites (d_1) et (d_2) étant sécantes, les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires et constituent donc une base du plan P. Il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2}$.
Il en résulte que $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2}) = x\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_1} + y\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$. Cela prouve que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, donc que la droite (d) est orthogonale à la droite Δ. ■

Définition. *Un <u>vecteur normal</u> à un plan P est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à P.*

D'après le théorème précédent, un vecteur est normal à un plan si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan.

Théorème. Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'unique plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

3. Équation cartésienne de plan

Voici le résultat analogue à l'équation cartésienne d'une droite.

Théorème. Dans un repère orthonormé, un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où d est un réel.
Réciproquement, si a, b, c, d sont quatre réels avec a, b, c non tous nuls, l'ensemble P des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration. Soit $A(x_0; y_0; z_0)$ un point du plan P et $M(x; y; z)$ un point de l'espace. On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$. Ainsi $M \in P$ équivaut à

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ce qui peut s'écrire $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$, ou encore

$$ax + by + cz + d = 0$$

si l'on pose $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.
Réciproquement, puisque a, b, c ne sont pas tous nuls, on peut supposer par exemple que $a \neq 0$. Alors $A\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ appartient à P et l'équation $ax + by + cz + d = 0$ équivaut à

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = 0$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ où $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ainsi P est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$. ■

Exemple

Soit $A(3;1;1)$, $B(1;2;8)$ et $C(-2;-2;2)$.
Montrer que le vecteur $\vec{n}(2;-3;1)$ est un vecteur normal du plan (ABC) et en déduire une équation de ce plan.

Réponse. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$, et comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires de (ABC), le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC). D'après le théorème, son équation est donc de la forme

$$2x-3y+z+d=0$$

où d est un réel. Or $A\in(ABC)$ se traduit par $2\times3-3\times1+1+d=0$, d'où $d=-4$ et finalement l'équation du plan (ABC) est

$$2x-3y+z-4=0.$$

L'exactitude du résultat se vérifie en remplaçant x, y, z successivement par les coordonnées de A, B, C.

4. Intersections de plans et de droites

❖ **Intersection d'une droite et d'un plan**

Théorème. Soit (d) une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et P un plan de vecteur normal $\vec{n}$.
1. Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (d) et le plan P sont sécants.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, alors soit (d) est incluse dans P (si $A\in P$), soit (d) et P sont strictement parallèles (si $A\notin P$).

❖ **Intersection de deux plans**

Théorème. Soit deux plans P et P' de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.
1. Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires, alors P et P' sont parallèles.
2. Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, alors P et P' sont sécants.

Théorème. On se place dans un repère orthonormé.
1. Les plans P et P' d'équations respectives
$$ax+by+cz+d=0 \text{ et } a'x+b'y+c'z+d'=0$$
sont sécants si et seulement si $(a;b;c)$ n'est pas proportionnel à $(a';b';c')$.
2. Lorsque $(a;b;c)$ n'est pas proportionnel à $(a';b';c')$, l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x;y;z)$ vérifient $\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$ est une droite.

Exemple

Considérons les plans P et P' d'équation respectives

$$x+y-2z+7=0 \text{ et } 2x-y+z-1=0.$$

Comme $(1;1;-2)$ et $(2;-1;1)$ ne sont pas proportionnels, ces plans sont sécants selon une droite. Déterminons-en une équation paramétrique. Pour cela, on résout le système obtenu en considérons l'une des trois variables, z par exemple, comme paramètre.

$$\begin{cases} x+y-2z+7=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2z-7 \\ 2x-y=1-z \end{cases}.$$

En faisant $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2$ on obtient

$$\begin{cases} x+y=2z-7 \\ 2x-y=1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=z-6 \\ 3y=5z-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}z-2 \\ y=\frac{5}{3}z-5 \end{cases}.$$

Posant $z=3t$, on voit alors qu'une représentation paramétrique de la droite d'intersection est $\begin{cases} x=t-2 \\ y=5t-5 \\ z=3t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

- **Plans perpendiculaires**

Définition. *Deux plans sont dits* <u>*perpendiculaires*</u> *si l'un des deux plans contient une droite perpendiculaire à l'autre plan.*

Théorème. Deux plans P et P' de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.