Produit scalaire dans l'espace

1. Produit scalaire dans l'espace

Définition. *Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant la même origine A. Il existe au moins un plan contenant les points A, B, C. On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.*

Théorème. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

Théorème (bilinéarité du produit scalaire). Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel. On a
1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ (linéarité à gauche) ;
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ (linéarité à droite).
3. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.

Théorème. Soit A, B, C trois points de l'espace et H le projeté orthogonal de B sur (AC). Alors

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens ;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AH \times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.

Théorème. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$
En particulier pour tout point A, B, C avec $A \neq B$ et $A \neq C$ on a
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}.$$

Théorème. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé. Alors
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Définition. *Deux vecteurs sont dits <u>orthogonaux</u> si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

Propriété. Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2. Vecteur normal à un plan

Démontrons un résultat énoncé dans le précédent chapitre de géométrie dans l'espace.

Théorème. Une droite (d) est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de ce plan.

Démonstration (exigible). Si (d) est orthogonale à toute droite du plan P, alors elle est orthogonale à (d_1) et (d_2).
Réciproquement, si $\vec{u}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont des vecteurs directeurs des droites (d), (d_1) et (d_2) alors $\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$ puisque (d) est orthogonale à (d_1) et (d_2).
Soit Δ une droite de P et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.
Les droites (d_1) et (d_2) étant sécantes, les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires et constituent donc une base du plan P. Il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2}$.
Il en résulte que $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2}) = x\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_1} + y\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$. Cela prouve que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, donc que la droite (d) est orthogonale à la droite Δ. ■

Définition. *Un vecteur normal à un plan P est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à P.*

D'après le théorème précédent, un vecteur est normal à un plan si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan.

Théorème. Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'unique plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

3. Équation cartésienne de plan

Voici le résultat analogue à l'équation cartésienne d'une droite.

Théorème. Dans un repère orthonormé, un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où d est un réel.
Réciproquement, si a, b, c, d sont quatre réels avec a, b, c non tous nuls, l'ensemble P des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration. Soit $A(x_0; y_0; z_0)$ un point du plan P et $M(x; y; z)$ un point de l'espace. On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$. Ainsi $M \in P$ équivaut à

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ce qui peut s'écrire $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$, ou encore

$$ax + by + cz + d = 0$$

si l'on pose $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.
Réciproquement, puisque a, b, c ne sont pas tous nuls, on peut supposer par exemple que $a \neq 0$. Alors $A\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ appartient à P et l'équation $ax + by + cz + d = 0$ équivaut à

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = 0$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ où $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ainsi P est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$. ■

Exemple

Soit $A(3;1;1)$, $B(1;2;8)$ et $C(-2;-2;2)$.
Montrer que le vecteur $\vec{n}(2;-3;1)$ est un vecteur normal du plan (ABC) et en déduire une équation de ce plan.

Réponse. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$, et comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires de (ABC), le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC). D'après le théorème, son équation est donc de la forme

$$2x-3y+z+d=0$$

où d est un réel. Or $A\in(ABC)$ se traduit par $2\times3-3\times1+1+d=0$, d'où $d=-4$ et finalement l'équation du plan (ABC) est

$$2x-3y+z-4=0.$$

L'exactitude du résultat se vérifie en remplaçant x, y, z successivement par les coordonnées de A, B, C.

4. Intersections de plans et de droites

❖ **Intersection d'une droite et d'un plan**

Théorème. Soit (d) une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et P un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (d) et le plan P sont sécants.

2. Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, alors soit (d) est incluse dans P (si $A\in P$), soit (d) et P sont strictement parallèles (si $A\notin P$).

❖ **Intersection de deux plans**

Théorème. Soit deux plans P et P' de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

1. Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires, alors P et P' sont parallèles.

2. Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, alors P et P' sont sécants.

Théorème. On se place dans un repère orthonormé.

1. Les plans P et P' d'équations respectives

$$ax+by+cz+d=0 \text{ et } a'x+b'y+c'z+d'=0$$

sont sécants si et seulement si $(a;b;c)$ n'est pas proportionnel à $(a';b';c')$.

2. Lorsque $(a;b;c)$ n'est pas proportionnel à $(a';b';c')$, l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x;y;z)$ vérifient $\begin{cases} ax+by+cz+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$ est une droite.

Exemple

Considérons les plans P et P' d'équation respectives

$$x+y-2z+7=0 \text{ et } 2x-y+z-1=0.$$

Comme $(1;1;-2)$ et $(2;-1;1)$ ne sont pas proportionnels, ces plans sont sécants selon une droite. Déterminons-en une équation paramétrique. Pour cela, on résout le système obtenu en considérons l'une des trois variables, z par exemple, comme paramètre.

$$\begin{cases} x+y-2z+7=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2z-7 \\ 2x-y=1-z \end{cases}.$$

En faisant $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2$ on obtient

$$\begin{cases} x+y=2z-7 \\ 2x-y=1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=z-6 \\ 3y=5z-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}z-2 \\ y=\frac{5}{3}z-5 \end{cases}.$$

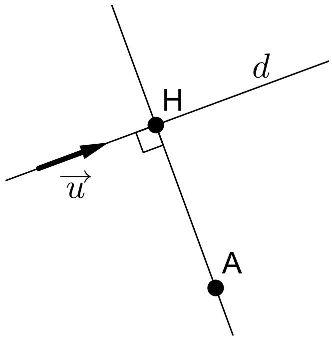
Posant $z=3t$, on voit alors qu'une représentation paramétrique de la droite d'intersection est $\begin{cases} x=t-2 \\ y=5t-5 \\ z=3t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

❖ **Plans perpendiculaires**

Définition. *Deux plans sont dits* <u>*perpendiculaires*</u> *si l'un des deux plans contient une droite perpendiculaire à l'autre plan.*

Théorème. Deux plans P et P' de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.

5. Distance d'un point à une droite



Considérons une droite de l'espace d et un point A du plan n'appartenant pas à d.
Soit H le projeté orthogonal de A sur d. Il s'obtient par exemple comme l'intersection de d avec le plan Q passant par A de vecteur normal $\vec{u}$.
En prenant un point M sur d on constate alors que

$$AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right)^2 = \overrightarrow{AH}^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM}^2$$

Et comme $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{HM}$, on a donc

$$AM^2 = AH^2 + HM^2.$$

Cela prouve que la distance de A à un point M de la droite est minimale si et seulement si $M = H$. La distance AH s'appelle distance de A à d.

Voyons deux méthodes pour la détermination de H et donc de la distance de A à d.

Soit $A(0;1;1)$ et D la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

❖ **Calcul du minimum de AM**

Le carré de la distance d'un point $M \in d$ au point A est donnée par

$$AM^2 = \left(-\frac{1}{3} + t - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 + (t-1)^2 = 2t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{26}{9}.$$

Comme la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$, AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimale. Ce trinôme du second en t atteint son minimum $t=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{3}$, donc le point H a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ et la distance vaut donc $\sqrt{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{8}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{26}{9}}=\frac{18}{9}=\sqrt{2}$.

❖ **Avec le plan passant Q**

Le plan Q est dirigé par un vecteur directeur de d, par exemple $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; il a donc pour équation $x+z-1=0$ puisque $P\in Q$. L'intersection de Q et d est donnée par

$$-\frac{1}{3}+t+t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$$

et l'on termine comme précédemment.

6. Perpendiculaire commune à deux droites

Théorème (de la perpendiculaire commune). Soit deux droites d et d' non coplanaires. Il existe une unique droite perpendiculaire à d et d'.

Démonstration. Existence. Soit

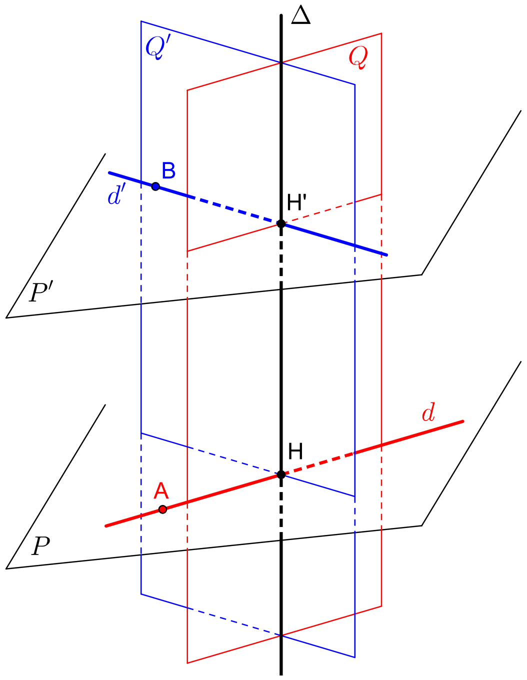
- $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et A l'un de ses points ;
- $\vec{v}$ un vecteur directeur de d' et B l'un de ses points.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires puisque les droites d et d' ne sont pas parallèles. Considérons

- P le plan passant A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il contient d et est parallèle à d' ;
- P' le plan passant B et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il contient d' et est parallèle à d.

Les plans P et P' sont parallèles, soit $\vec{n}$ un de leur vecteur normal. Considérons alors

- Q le plan passant par A dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{n}$. Il est perpendiculaire à P et contient d ;
- Q' le plan passant par B dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{n}$. Il est perpendiculaire à P' et contient d'.



Les plans Q et Q' ne sont pas parallèles, sinon les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{n}$ serait coplanaires. Soit $\Delta=Q\cap Q'$ leur droite d'intersection, elle est dirigée par $\vec{n}$.

Puisque Δ est orthogonal au plan P, elle est orthogonale à d. De plus ces droites sont sécantes (dans le plan Q), donc elles sont perpendiculaires. Il en est de même de Δ et d'.

Ainsi Δ est une perpendiculaire commune à d et d'.

Unicité. Soit Δ' une perpendiculaire commune à d et d' et $\overrightarrow{n'}$ un de ses vecteurs directeurs. Vu que $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ est une base de l'espace, il existe des réels a, b, c tels que

$$\overrightarrow{n'}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{n}.$$

Comme $\Delta' \perp d$ on a $\vec{u} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$. Mais
$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{n'} = \vec{u} \cdot (a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{n}) = a\vec{u} \cdot \vec{u} + b\vec{u} \cdot \vec{v} + c\vec{u} \cdot \vec{n} = a\|\vec{u}\|^2,$$
la dernière égalité résultant du fait que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Ainsi $0 = a\|\vec{u}\|^2$ et comme le vecteur $\vec{u}$ est non nul, il vient que $a = 0$. On montre de la même façon que $b = 0$. Finalement $\overrightarrow{n'} = c\vec{n}$, ce qui prouve que les droites Δ et Δ' sont parallèles.
Les droites d et Δ sont incluses dans le plan Q, et comme Δ' est parallèle à Δ et qu'elle est sécante d, on obtient que $\Delta' \subset Q$. De même $\Delta' \subset Q'$.
Finalement $\Delta' \subset Q \cap Q'$ et comme $\Delta = Q \cap Q'$, c'est que $\Delta' = \Delta$, ce qui prouve qu'il n'existe qu'une seule droite perpendiculaire à d et d'. ■

❖ Distance entre deux droites

On garde les notations précédentes. Soit $H = P \cap \Delta$ et $H' = P' \cap \Delta$. Montrons que la plus courte distance entre deux points de d et d' est HH'.

Soit $A \in d$ et $B \in d'$. On a
$$AB^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'B}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'B}\right)^2 = \left(\overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B}\right)^2.$$
En développant, il vient
$$AB^2 = \overrightarrow{HH'}^2 + 2\overrightarrow{HH'} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B}\right) + \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B}\right)^2.$$
Le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{H'B}$, donc $\overrightarrow{HH'} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B}\right) = 0$. On en déduit
$$AB^2 = HH'^2 + \left\|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B}\right\|^2.$$
Cela montre que $AB \geq HH'$. L'égalité a lieu si et seulement si $\left\|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B}\right\|^2 = 0$, soit $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B} = \vec{0}$. Or comme il existe deux réels k et k' tels que $\overrightarrow{AH} = k\vec{u}$ et $\overrightarrow{H'B} = k'\vec{v}$, cela revient à $k\vec{u} + k'\vec{v} = \vec{0}$. Comme les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, la seule possibilité est que $k = k' = 0$, d'où $A = H$ et $B = H'$.

Cela montre que la distance minimale entre un point $A \in d$ et $B \in d'$ est HH' atteinte si et seulement $A = H$ et $B = H'$.

<u>Exemple</u>

Considérons les droites D et D' d'équations paramétriques respectives
$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 2 + 4s \\ y = -9 + 4s \\ z = 7 + s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$
Elles passent respectivement $A(-1; 0; 2)$ et $B(2; -9; 7)$ et sont dirigées par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas coplanaires.

Cherchons un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les égalités $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ donnent
$$\begin{cases} 3a + 2b - c = 0 \\ 4a + 4b + c = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} c = 3a + 2b \\ 7a + 6b = 0 \end{cases}$$
Pour satisfaire la seconde équation on peut prendre $a = 6$ et $b = -7$, d'où $c = 4$. On obtient donc comme vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Considérons les plans

- Q passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{n}$;
- Q' passant par B et dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{n}$.

L'intersection de Q et Q' est la perpendiculaire commune Δ à D et D'. Pour déterminer cette intersection, on peut soit utiliser les équations paramétriques, soit les équations cartésiennes. Donnons les deux méthodes.

Ces plans ont pour représentations paramétriques

$$\begin{cases} x = -1 + 3t + 6t' \\ y = 0 + 2t - 7t' \\ z = 2 - t + 4t' \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 2 + 4s + 6s' \\ y = -9 + 4s - 7s' \\ z = 7 + s + 4s' \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} -1 + 3t + 6t' = 2 + 4s + 6s' \\ 2t - 7t' = -9 + 4s - 7s' \\ 2 - t + 4t' = 7 + s + 4s' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t' = 3 - 3t + 4s + 6s' \\ -7t' = -9 - 2t + 4s - 7s' \\ 4t' = 5 + t + s + 4s' \end{cases}$$

Il y a 4 inconnues et seulement 3 équations, ce qui est normal puisque « la solution » de ce système est une droite. Considérons par exemple t' comme paramètre.
En faisant $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$ et $L_2 \leftarrow L_1 + 2L_3$, il vient

$$\begin{cases} 18t' = 18 + 7s + 18s' \\ t' = 1 + 6s + s' \\ 4t' = 5 + t + s + 4s' \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 18L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 0 = -101s \\ t' = 1 + 6s + s' \\ t = 5 + s + 4s' - 4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t' = 1 + s' \\ t = -1 \end{cases}$$

Cela montre qu'en faisant $t = -1$ dans l'équation de Q (ou $s = 0$ dans celle de Q'), on obtient une représentation paramétrique de Δ :

$$\begin{cases} x = -4 + 6t' \\ y = -2 - 7t' \\ z = 3 + 4t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

Retrouvons ce résultat en utilisant les équations cartésiennes de plan. On cherche un vecteur normal de Q, donc orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{n}$, ce qui à l'aide des produits scalaires conduit à

$$\begin{cases} 3a + 2b - c = 0 \\ 6a - 7b + 4c = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} c = 3a + 2b \\ 18a + b = 0 \end{cases}$$

Pour satisfaire la seconde équation, $a = -1$ et $b = 18$ conviennent, d'où $c = 33$. Ainsi $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} -1 \\ 18 \\ 33 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q, d'où $Q: -x + 18y + 33z - 67 = 0$.

De même $\vec{v} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$ donnent

$$\begin{cases} 4a + 4b + c = 0 \\ 6a - 7b + 4c = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} c = -4a - 4b \\ -10a - 23b = 0 \end{cases}$$

Pour satisfaire la seconde équation, $a = 23$ et $b = -10$ conviennent, d'où $c = -52$. Ainsi $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 23 \\ -10 \\ -52 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q', d'où $Q': 23x - 10y - 52z + 228 = 0$.

L'intersection des plans Q et Q' se détermine en résolvant le système.

$$\begin{cases} -x + 18y + 33z - 67 = 0 \\ 23x - 10y - 52z + 228 = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 23L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -x + 18y + 33z - 67 = 0 \\ 404y + 707z - 1313 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation se simplifie par 101 et donne $4y + 7z - 13 = 0$, d'où

$$\begin{cases} -x + 18y + 33z - 67 = 0 \\ 4y + 7z - 13 = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow 9L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x - 3z + 17 = 0 \\ 4y + 7z - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3z - 17}{2} \\ y = \frac{13 - 7z}{4} \end{cases}$$

Une équation paramétrique de Δ est donc

$$\begin{cases} x = \frac{3t-17}{2} \\ y = \frac{13-7t}{4} \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

En posant $t = 3 + 4t'$, on retrouve le paramétrage précédent, ce qui évite les fractions.

L'intersection de D et Δ s'obtient en résolvant

$$\begin{cases} -1 + 3t = -4 + 6t' \\ 2t = -2 - 7t' \\ 2 - t = 3 + 4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -t + 2t' \\ 2t = -2 - 7t' \\ -1 = t + 4t' \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 0 = 6t' \\ 2t = -2 - 7t' \\ -1 = t + 4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ -2 = -2 \\ t = -1 \end{cases}$$

Donc $\Delta \cap D = H(-4; -2; 3)$.

e même pour D' et Δ :

$$\begin{cases} 2 + 4s = -4 + 6t' \\ -9 + 4s = -2 - 7t' \\ 7 + s = 3 + 4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3t' - 2s \\ 4s = 7 - 7t' \\ 4 = 4t' - s \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -5 = -5t' \\ 2t = -2 - 7t' \\ 4 = 4t' - s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ s = 0 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

Donc $\Delta \cap D = H'(2; -9; 7)$.

Enfin la distance entre les droites D et D' est

$$HH' = \sqrt{\left(2 - (-4)\right)^2 + \left(-9 - (-2)\right)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{101}.$$