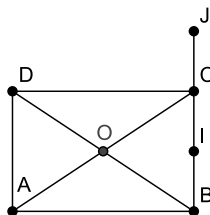


Produit scalaire dans l'espace – Exercices

Produit scalaire

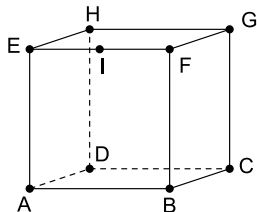
1 $ABCD$ est un rectangle de centre O avec $AB = 6$ et $AD = 4$. On appelle I le milieu du segment $[BC]$ et J le point défini par $\vec{BJ} = \frac{3}{2}\vec{BC}$. Calculer

- a. $\vec{AO} \cdot \vec{BD}$ b. $\vec{OI} \cdot \vec{BC}$
 c. $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$ d. $\vec{AJ} \cdot \vec{BO}$
 e. $\vec{IA} \cdot \vec{AD}$ f. $\vec{CJ} \cdot \vec{DI}$



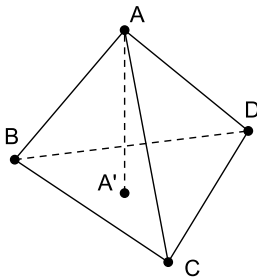
2 Calculer les produits scalaires dans le cube de côté a ci-contre.

- a. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ b. $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$
 c. $\vec{EF} \cdot \vec{AD}$ d. $\vec{AC} \cdot \vec{HD}$
 e. $\vec{AH} \cdot \vec{BG}$ f. $\vec{FC} \cdot \vec{FD}$



3 On considère un tétraèdre régulier $ABCD$, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

A' est le centre de gravité du triangle BCD . Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane. Ainsi, le segment $[AA']$ est une médiane du tétraèdre $ABCD$.



- Montrer que $\vec{AA'} \cdot \vec{BD} = 0$ et que $\vec{AA'} \cdot \vec{BC} = 0$. On pourra utiliser le point I milieu de $[BD]$.
- En déduire que la médiane (AA') est orthogonale à la face BCD .

4 Soit $A(7; -5; 6)$, $B(0; -4; -3)$ et $C(1; 3; -3)$ et I le milieu de $[AC]$.

- Montrer que le triangle ABC est rectangle en B .
- Déterminer une valeur approchée de $\vec{CB} \cdot \vec{BI}$.

Équation cartésienne d'un plan, position relative

5 Déterminer une équation du plan passant par $A(1; -2; 4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2; 1; 1)$.

6 Soit P le plan d'équation $x + y + z + 3 = 0$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal de P .

7 Soit $A(-2; 1; 0)$, $B(1; 3; 1)$ et $C(3; 0; 3)$.

- Justifier que A, B, C ne sont pas alignés.
- Montrer que le vecteur $\vec{n}(-7; 4; 13)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
- En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

8 Donner la position relative d'un plan P de vecteur normal $\vec{n}(-1; 3; 7)$ et d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}(4; 2; -1)$.

9 Soit P le plan d'équation $7x + 2y - z + 4 = 0$. Les droites (d_1) et (d_2) sont définies par une représentation paramétrique donnée ci-dessous :

$$(d_1) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 4t \\ z = 5 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } (d_2) : \begin{cases} x = 15 - 3t \\ y = -9 + t \\ z = 7 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- Le plan P et la droite (d_1) sont-ils sécants ?
- Déterminer l'intersection du plan P et de la droite (d_2) .

10 Soit les points $A(2; 4; 7)$ et $B(1; 1; 1)$ et le plan P d'équation $5x + 3y - z + 1 = 0$.

- Justifier que la droite (AB) et le plan P sont sécants.
- Déterminer leur intersection.

11 Justifier que les plans d'équation $2x + y - z + 7 = 0$ et $4x + 5y + 2z - 1 = 0$ sont sécants.

12 Dans un repère de l'espace on considère les trois plans suivants :

- P_1 d'équation $x + y - z = 0$;
- P_2 d'équation $2x + y + z - 3 = 0$;
- P_3 d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

- Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ .
- En déduire la nature de l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

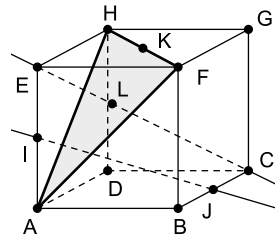
Problèmes de baccalauréat

13 (2013, Antilles-Guyane).

QCM sans justification où une seule réponse est exacte.

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$:

- $ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1 ;
- on appelle P le plan (AFH) ;
- le point I est le milieu du segment $[AE]$;
- le point J est le milieu du segment $[BC]$;
- le point K est le milieu du segment $[HF]$;
- le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan P .



- Les droites (IJ) et (EC) sont...
 a. strictement parallèles b. non coplanaires
 c. sécantes d. confondues
- Le produit scalaire $\vec{AF} \cdot \vec{BG}$ est égal à...
 a. 0 b. -1 c. 1 d. 2
- Le plan P a pour équation cartésienne...
 a. $x + y + z - 1 = 0$ b. $x - y + z = 0$
 c. $-x + y + z = 0$ d. $x + y - z = 0$
- Un vecteur normal au plan P est...
 a. \vec{EG} b. \vec{EL} c. \vec{IJ} d. \vec{DI}
- Laquelle de ces égalités est vraie ?
 a. $\vec{AL} = \frac{1}{2}\vec{AH} + \frac{1}{2}\vec{AF}$ b. $\vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AK}$
 c. $\vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AE}$ d. $\vec{ID} = \frac{1}{3}\vec{IJ}$

14 (2011, Amérique du Sud). Vrai ou faux à justifier.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(-1; -1; 1)$ et les droites D et D' de représentations paramétriques :

$$D: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \text{ et } D': \begin{cases} x = 3t' \\ y = t' + 2 \\ z = 3t' - 2 \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite D ».

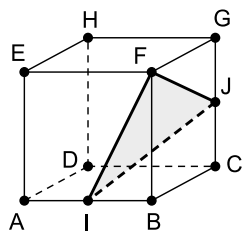
Proposition 2 : « Le plan perpendiculaire à la droite D passant par le point O a pour équation : $2x - 3y + z = 0$ ».

Proposition 3 : « Les droites D et D' sont orthogonales ».

Proposition 4 : « Les droites D et D' sont coplanaires ».

15 (2005, Amérique du Sud).

Vrai ou faux ? Ne pas justifier. On donne le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.



- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}$
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \times IC \times \cos \frac{\pi}{3}$

On utilise dans les questions suivantes le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

5. Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \text{ le paramètre } t \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

6. Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ le paramètre } t \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

- $6x - 7y + 8z - 3 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (IF) .
- L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par I et par le milieu de l'arête $[DC]$.
- Le vecteur de coordonnées $(-4; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (FIJ) .
- Le volume du tétraèdre $EFIJ$ est égal à $\frac{1}{6}$.

16 (2014, centres étrangers). Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1; 2; 7)$, $B(2; 0; 2)$, $C(3; 1; 3)$, $D(3; -6; 1)$ et $E(4; -8; -4)$.

- Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- Soit $\vec{u}(1; b; c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.
 - Déterminer les valeurs de b et c telles que \vec{u} soit un vecteur normal au plan (ABC) .
 - En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x - 2y + z - 4 = 0$.
 - Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
- On considère la droite Δ de l'espace dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
 - La droite Δ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?
 - Déterminer les coordonnées du point H , intersection de la droite Δ et du plan (ABC) .
- Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC) .

17 (2014, métropole). Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le tétraèdre $ABCD$ dont les sommets ont pour coordonnées :

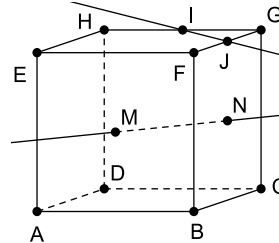
$$A(1; -\sqrt{3}; 0), B(1; \sqrt{3}; 0), C(-2; 0; 0) \text{ et } D(0; 0; 2\sqrt{2}).$$

- Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 4$.
- On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
 - Démontrer que Δ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O .
 - Déterminer les coordonnées du point G , intersection de la droite Δ et du plan (ABD) .
- On note L le milieu du segment $[AC]$. Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC) .
 - Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.
- Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

18 (2014, Amérique du Sud). QCM sans justification.

- Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(2; 5; -1)$, $B(3; 2; 1)$ et $C(1; 3; -2)$. Le triangle ABC est :
 - rectangle et non isocèle
 - isocèle et non rectangle
 - rectangle et isocèle
 - équilatéral
- Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point $A(2; 5; -1)$. Une représentation paramétrique de la droite d , perpendiculaire au plan P et passant par A est :

a. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$	b. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 3 - t \end{cases}$
c. $\begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$	d. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$
- Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est :
 - l'ensemble vide
 - la médiatrice du segment $[AB]$
 - le cercle de diamètre $[AB]$
 - la droite (AB)
- La figure ci-dessous représente un cube $ABCDEFGH$. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[GH]$ et $[FG]$. Les points M et N sont les centres respectifs des faces $ABFE$ et $BCGF$. Les droites (IJ) et (MN) sont :



- perpendiculaires
- sécantes, non perpendiculaires
- orthogonales
- parallèles

19 (2014, Polynésie). Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5; -5; 2), B(-1; 1; 0), C(0; 1; 2) \text{ et } D(6; 6; -1).$$

- Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.
- Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2; 3; 1)$ est un vecteur normal au plan (BCD) .
 - Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD) .

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite D orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A .
- Déterminer les coordonnées du point H , intersection de la droite D et du plan (BCD) .
- Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante.
- On admet que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$.
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle \widehat{BAC} .

20 (2013, centres étrangers). On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On considère les points $I(1; \frac{1}{3}; 0)$, $J(0; \frac{2}{3}; 1)$, $K(\frac{3}{4}; 0; 1)$ et $L(a; 1; 0)$ avec $a \in [0; 1]$.

Partie A –

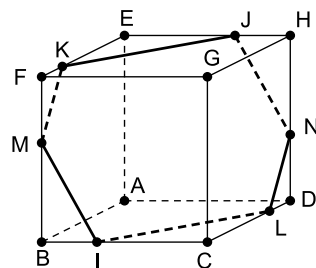
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ) .
- Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'(a - \frac{3}{4}) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$
- Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si $a = \frac{1}{4}$.

Partie B – Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.

Le point L a donc pour coordonnées $(\frac{1}{4}; 1; 0)$.

- Démontrer que le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.
- La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube $ABCDEFGH$ telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.



On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH) .

Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N .

- Prouver que le vecteur $\vec{n}(8; 9; 5)$ est un vecteur normal au plan (IJK) .
- En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.
- En déduire les coordonnées des points M et N .

21 (2013, Pondichéry). QCM sans justification où une seule réponse est exacte.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal, t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$$

La droite (D) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

On donne les points de l'espace $M(-1; 2; 3)$ et $N(1; -2; 9)$.

- Une représentation paramétrique du plan (P) est :
 - $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$
 - $\begin{cases} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{cases}$
 - $\begin{cases} x = t + t' \\ y = 1 - t - 2t' \\ z = 1 - t - 3t' \end{cases}$
 - $\begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = 1 - 2t + 2t' \\ z = -t - t' \end{cases}$
- La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point $A(-8; 3; 2)$.
 - La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.
 - La droite (D) est une droite du plan (P) .
 - La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.
- La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
 - La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
 - La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
 - La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.
- Les plans (P) et (S) sont parallèles.
 - La droite (Δ) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$$
 est la droite d'intersection des plans (P) et (S) .
 - Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S) .
 - Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

22 (2014, métropole). Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC , ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A . On désigne par E , F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

- On désigne par P le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF) .
On note H le point d'intersection du plan P et de la droite (DF) .
 - Donner les coordonnées des points D et F .
 - Donner une représentation paramétrique de (DF) .
 - Déterminer une équation cartésienne du plan P .
 - Calculer les coordonnées du point H .
 - Démontrer que l'angle \widehat{EHG} est un angle droit.
- On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique \widehat{EMG} .
Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
 - Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.
 - Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M .
En déduire que $ME \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
 - Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin \frac{\alpha}{2}$ est maximal. En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.
 - Conclure.
 - (question non présente dans le sujet initial). Montrer que α est maximale si et seulement si $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$.