Révision

1 *(2014, Polynésie).* Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

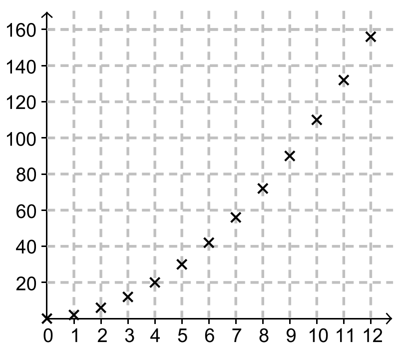
1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		Algorithme 2	
Variables	n est un entier naturel u est un réel	**Variables**	n est un entier naturel u est un réel
Entrée	Saisir la valeur de n	**Entrée**	Saisir la valeur de n
Traitement	u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	**Traitement**	u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$ u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie	Afficher u	**Sortie**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



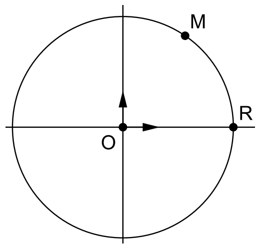
   a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.
   b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.
   Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   b. On définit, pour tout entier naturel n,
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n.$$
   Démontrer que, pour tout entier naturel n,
   $$S_n = (n+1)(n+2).$$
   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n,
   $$S_n = u_{n+1} - u_0,$$
   puis exprimer u_n en fonction de n.

2 *(2016, Liban).* On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :
$$z_0 = 0 \text{ et } z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5.$$
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n.$$
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4 - 2i).$$
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

3 *(2015, Antilles-Guyane).*
Partie A – Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $(O; \vec{u})$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.
2. Soit le point M' d'affixe z' définie par
   $$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z + |z|}{2}\right).$$
3. Reproduire la figure et construire le point M'.

Partie B – On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence $z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{z_n + |z_n|}{2}\right)$.
Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?
3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.
   a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
   b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

4 *(2014, Antilles-Guyane).* On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$.
On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$.
   Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
   En déduire le signe de $g(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x} g(x)$.
4. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
6. **a.** Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.
   b. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite T.

Partie B

1. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x - 1)e^{-x}$.
   Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^{-x}$.
2. On note D le domaine délimité par la courbe C, la droite T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine D.

5 *(2014, centres étrangers).* Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0{,}01$; $x = 0{,}02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0{,}99$ par pas de $0{,}01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0{,}2^2 = 0{,}04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2} \approx 0{,}45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

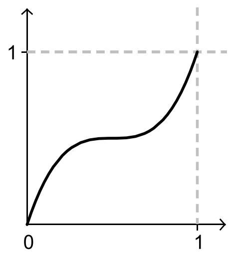
Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0; 1]$ par :
$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique ci-contre, en faisant apparaître les pointillés utiles.
Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.



2. On considère la fonction f_2 définie sur $[0; 1]$ par
$$f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x].$$
On admet que f_2 est une fonction de retouche.
On définit g sur $[0; 1]$ par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a. Établir que, pour tout $x \in [0; 1]$
$$g'(x) = \frac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}.$$

b. Déterminer les variations de la fonction g sur $[0; 1]$.
Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c. Établir que l'équation $g(x) = 0{,}05$ admet sur l'intervalle $[0; 1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.
On admettra que
$$0{,}08 < \alpha < 0{,}09 \text{ et que } 0{,}85 < \beta < 0{,}86.$$

Partie B – On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale)
	y (nuance retouchée)
	E (écart)
	c (compteur)
	k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire
	x prend la valeur $\frac{k}{100}$
	y prend la valeur $f(x)$
	E prend la valeur $\lvert y - x \rvert$
	Si $E \geq 0{,}05$, faire
	c prend la valeur $c + 1$
	Fin si
	Fin pour
Sortie :	Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la partie A ?

Partie C – Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-a-dire telles que, pour tout réel $x \in [0; 1]$, on ait $f(x) \leq x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire A_f de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :
$$f_1(x) = xe^{x^2-1} \text{ et } f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. **a.** Calculer A_{f_1}.

b. Calculer A_{f_2}.

2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

6 *(2015, Pondichéry).*

Partie A – Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b réel rels que $a \neq 1$.

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Partie B – En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

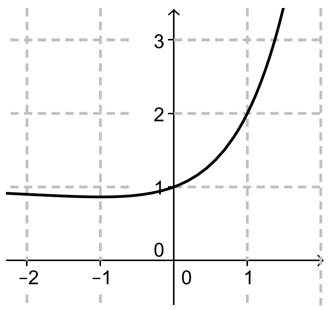
2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.
   a. Justifier que, pour tout entier naturel n,
   $$h_{n+1} = 0{,}75 h_n + 30.$$
   b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
   Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
   c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

7 *(2012, Antilles-Guyane).*
Les parties B et C sont indépendantes.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$
On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A – Étude de la fonction
1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

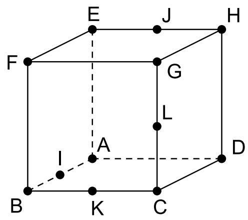
Partie B – Recherche d'une tangente particulière
Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe C au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.
1. On appelle T_a la tangente à C au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à C en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité $1 - a^2 e^{a-1} = 0$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de l'équation $1 - x^2 e^{x-1} = 0$.
4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Partie C – Calcul d'aire
Le graphique donné représente la courbe C de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



1. Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe C est au-dessus de la droite Δ. Hachurer le domaine D limité par la courbe C, la droite Δ, la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées.
2. On pose $I = \int_0^1 xe^{x-1}\,\mathrm{d}x$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x-1}$
   a. Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$G(x) = (x-1)e^{x-1}$$
   est une primitive de g.
   b. Montrer alors que $I = \frac{1}{e}$.
3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine D.

8 *(2015, Liban).* $ABCDEFGH$ est un cube.

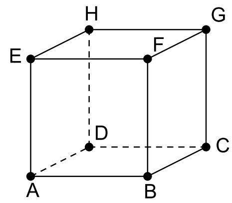


I est le milieu du segment $[AB]$, J est le milieu du segment $[EH]$, K est le milieu du segment $[BC]$ et L est le milieu du segment [CG]. On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
1. **a.** Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre $FIJK$.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

9 *(2015, Nouvelle-Calédonie).* Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_2) suivantes :
$$(P_1) \quad (x+y+z=1) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}\right)$$
$$(P_2) \quad \left(x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x+y+z=1)$$

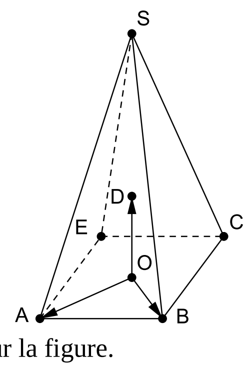
Partie A – L'implication (P_2) est-elle vraie ?

Partie B – Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$, représenté ci-dessous, et on définit le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** Vérifier que le plan d'équation $x+y+z=1$ est le plan (BDE).
   b. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
   c. Montrer que l'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
2. Le triangle BDE est-il équilatéral ?
3. Soit M un point de l'espace.
   a. Démontrer que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 = AK^2 + MK^2$.
   b. En déduire que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 \geq AK^2$.
   c. Soient x, y et z des réels quelconques. En appliquant le résultat de la question précédente au point M de coordonnées $(x; y; z)$, montrer que l'implication (P_1) est vraie.

10 *(2015, Amérique du Nord).* Dans l'espace, on considère une pyramide $SABCE$ à base carrée $ABCE$ de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right)$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées $(0; 0; 3)$ dans ce repère.



Partie A
1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure.

2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure.

3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}; 0\right)$.
Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.

Partie B – Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère $AUVE$ est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$.
Vérifier que le plan (EAU) a pour équation
$$3x - 3y + 5z - 3 = 0.$$

2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.

3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).

4. Le plan (EAU) partage la pyramide $(SABCE)$ en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

11 *(2016, Nouvelle-Calédonie).* Dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation
$$\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point $A(1; 1; 1)$ appartient-il au plan P_m ?

2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \\ z = t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

3. **a.** Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.

b. Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.

c. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que $-10 \leq m \leq 10$ et $-10 \leq m' \leq 10$.
On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a. Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

b. Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si
$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0.$$

c. On donne l'algorithme suivant :

```
Variables :    m et m' entiers relatifs
Traitement :   Pour m allant de −10 à 10
                 Pour m' allant de −10 à 10
                 Si (mm')² + 16(m − 1)(m' − 1) + 4mm' = 0
                   Alors Afficher (m; m')
                 Fin du Pour
               Fin du Pour
```

Quel est le rôle de cet algorithme?

d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4; 1)$, $(0; 1)$ et $(5; -4)$.
Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

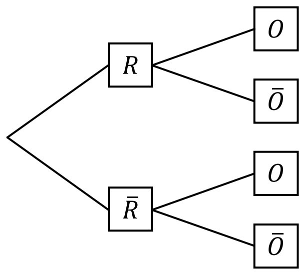
12 *(2016, Pondichéry).* Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.
La Hadopi (Haute Autorité pour la Diffusion des Œuvres et la Protection des droits sur Internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.
Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.
Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole (P) suivant :
On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.
Pour chaque jeune de cet échantillon :

- le jeune lance un dé équilibré à 6 faces; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
- l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? ».

▪ Si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
▪ si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
▪ si le résultat du lancer est « 3 » ou « 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.
On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

1. *Calculs de probabilités*
On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole (P).
On note : R l'évènement « le résultat du lancer est pair »,
O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».
Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$.

2. *Intervalle de confiance*

a. À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole (P). Sur un échantillon de taille 1500, il dénombre 625 réponses « Oui ».
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

b. Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?