Loi binomiale

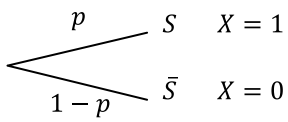
1. Loi de Bernoulli

❖ Épreuve de Bernoulli

Définition. *On considère une expérience aléatoire à deux issues :*

- *S (appelé succès) avec une probabilité p ;*
- *$\bar{S}$ (appelé échec) avec une probabilité $1-p$.*

Cette situation constitue une épreuve de Bernoulli.



Exemple

On interroge une personne au hasard et on lui demande si elle est gauchère. C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \approx 0{,}13$ (la fréquence de gauchers est d'environ 13 %).

Exemple

Dans une usine, la probabilité qu'un produit présente un défaut est 2 %.
On choisit un produit au hasard dans la production et regarde s'il présente un défaut. C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}02$.

❖ Loi de Bernoulli

Définition. *On considère un schéma de Bernoulli de paramètre p.*
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès, c'est-à-dire prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 sinon. On l'appelle variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p.
La loi de probabilité de X est appelée loi de Bernoulli.

La loi de X est donc la suivante.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

Théorème. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On a
$E(X) = p$ et $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.

Démonstration. On a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{2} x_i P(X = x_i) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) = p$$

et

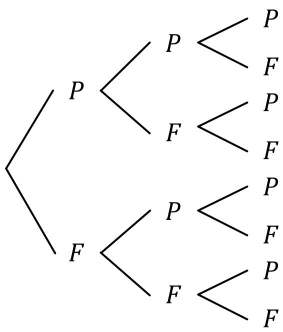
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_{k=1}^{2} \big(x_k - E(X)\big)^2 P(X = x_i) = (0-p)^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)\big(p + (1-p)\big) = (1-p)p. \ \blacksquare\end{aligned}$$

2. Loi binomiale

Définition. *La répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes s'appelle un <u>schéma de Bernoulli</u> de paramètres n et p.*
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. La loi de X est appelée <u>loi binomiale</u> de paramètres n et p.

<u>Exemple A</u>

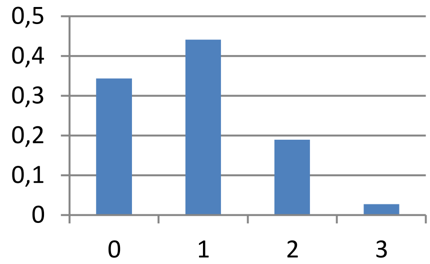
On lance trois fois de suite une pièce truquée, telle que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3.
On note P l'événement « obtenir pile à un lancer » (succès) et F l'événement « obtenir face à un lancer » (échec).
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de « pile » apparus au cours des trois lancers ; elle suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}3$.
La variable aléatoire X prend trois valeurs : 0, 1, 2, 3. On convient de noter par exemple PFP pour la succession pile, face, pile. On a



- $P(X = 0) = P(FFF) = 0{,}7^3$;
- $P(X = 1) = P(PFF) + P(FPF) + P(FFP) = 3 \times 0{,}3 \times 0{,}7^2$;
- $P(X = 2) = P(FPP) + P(PFP) + P(PPF) = 3 \times 0{,}7 \times 0{,}3^2$;
- $P(X = 3) = P(PPP) = 0{,}3^3$.

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant et représentée ci-contre.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,343	0,441	0,189	0,027



On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

L'espérance est égale à
$$E(X) = 0 \times 0{,}343 + 1 \times 0{,}441 + 2 \times 0{,}189 + 3 \times 0{,}027 = 0{,}9.$$
Ce calcul signifie que si l'on répète un grand nombre de fois ce schéma de Bernoulli, on obtient en moyenne 0,9 succès par expérience.
La variance est égale à
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= 0{,}343(0{,}9-0)^2 + 0{,}441(0{,}9-1)^2 + 0{,}189(0{,}9-2)^2 + 0{,}027(0{,}9-3)^2 \\ &= 0{,}63.\end{aligned}$$

Définition. *Le nombre de chemins permettant d'obtenir k succès (et donc $n-k$ échecs) se note $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ». Par exemple $\binom{3}{2} = 3$ (voir exemple ci-dessus).*
La calculatrice permet de déterminer ces nombres, cette notion sera étudiée dans le chapitre « dénombrement ».

Théorème. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors pour tout $0 \leq k \leq n$, on a
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration. Dans un schéma de Bernoulli, chaque chemin permettant d'obtenir k succès permet aussi d'obtenir $n-k$ échecs. Chacun de ces chemins a donc pour probabilité

$$p^k(1-p)^{n-k}.$$

Chaque chemin est déterminé par la donnée des k tirages parmi les n possibles pour lesquels il y a succès. Il y a donc $\binom{n}{k}$ chemins possibles, d'où la probabilité annoncée. ■

En TI, nous utiliserons deux fonctions du menu `Distrib`, obtenu en faisant 2nd var :

- `BinomFdp(n,p,x)` qui calcule $P(X=x)$, fonction « de poids »
- `BinomFrép(n,p,x)` qui calcule $P(X \leq x)$, fonction « de répartition ».

Exemple A

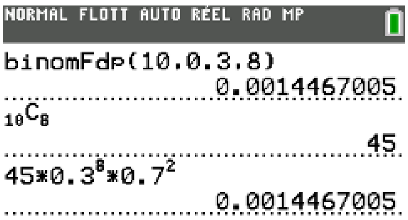
On lance 10 fois de suite la pièce truquée qui amène pile avec une probabilité 0,3.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de piles obtenus sur les 10 lancers. X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}3$.

1. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 8 piles.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au plus 7 piles.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins 6 piles.
4. Calculer la probabilité d'obtenir entre 3 et 7 piles.
5. Déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0{,}7$.

Réponse.

1. On veut calculer $P(X=8)$. Sur la TI-83 Premium CE, il suffit de renseigner les informations nécessaires dans la fonction `binomFdp` : le nombre d'essais, puis p, puis x. Ensuite il faut appuyer sur « coller » puis lancer le calcul en appuyant sur entrer.
   Sur les modèles plus anciens, après avoir appuyé sur `binomFdp` , il faut saisir directement les paramètres, dans le bon ordre.

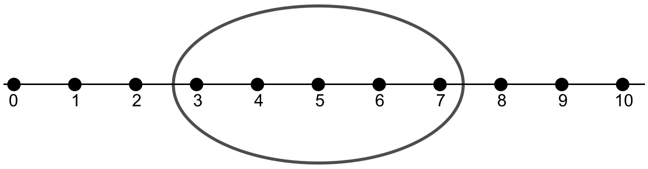
   Puisque $P(X=8)=\binom{10}{8}\times 0{,}3^8 \times 0{,}7^2$, on peut aussi effectuer le calcul sans utiliser `binomFdp`.



2. L'événement « obtenir au plus 7 piles » est $(X \leq 7)$. Il se calcule à l'aide la commande `binomFrép(10,0.3,7)`. Donc $P(X \leq 7) \approx 0{,}998$.

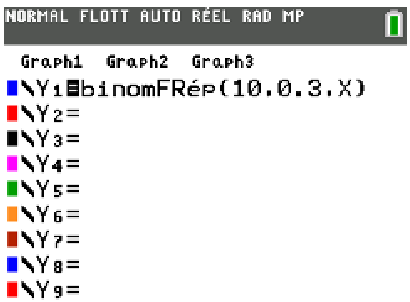
3. L'événement contraire de $(X \geq 6)$ est
   $$(X<6)=(X \leq 5).$$
   En effet, X ne prend que des valeurs entières, donc si X n'est pas un entier supérieur ou égal à 6, il est inférieur ou égal à 5. Ainsi
   $$P(X \geq 6)=1-P(X \leq 5)$$
   et la calculatrice permet de conclure que $P(X \geq 6) \approx 0{,}047$.

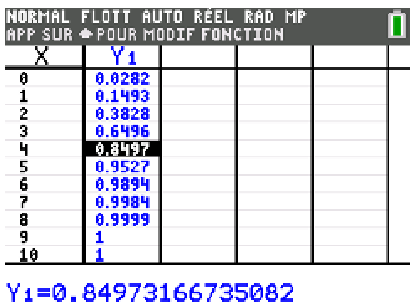
4. Nous devons calculer $P(3 \leq X \leq 7)$. Pour cela, nous écrirons qu'un nombre compris entre 3 et 7 est un nombre inférieur à 7 qui n'est pas inférieur ou égal à 2, c'est-à-dire
$$P(3 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 2).$$



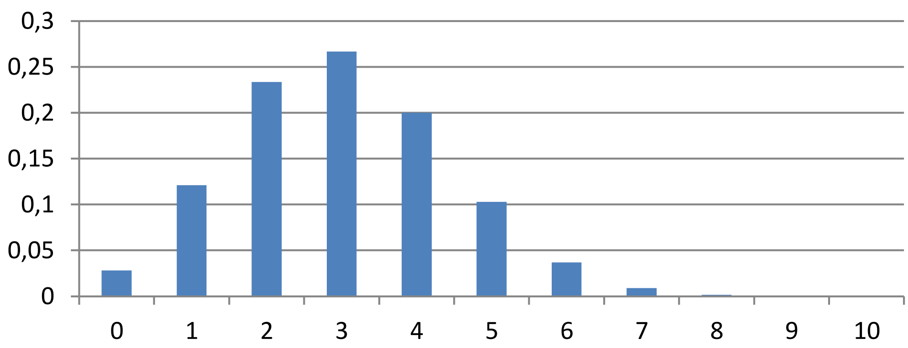
La commande `binomFdp(10,0.3,7)- binomFdp(10,0.3,2)` montre alors que la probabilité cherchée est environ 0,616.

5. Il suffit de calculer toutes les valeurs de $P(X \leq k)$ pour $k = 0$; 1 ; 2 ; 3 ; … jusqu'à ce que le résultat dépasse pour la première fois 0,7.
Pour cela on rentre la fonction `binomFdp(10,0.3,X)` dans la calculatrice puis on débute la table à 0 avec un pas de 1.
L'entier cherché est donc 4.





On a représenté sur un tableur le diagramme de la loi de probabilité de X.



- **Espérance et variance de la loi binomiale**

Théorème. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors
$$E(X) = np \text{ et } \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Ce théorème sera démontré dans un chapitre ultérieur. Notons que pour $n = 1$, on retrouve le résultat sur la loi de Bernoulli.

Exemple A

L'espérance est $E(X) = 10 \times 0{,}3 = 3$, ce qui s'interprète comme étant le nombre moyen de piles obtenus sur un grand nombre de répétitions de l'expérience.
La variance est $\mathrm{Var}(X) = 10 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 2{,}1$.

3. Intervalle de fluctuation

Définition. Soit $\alpha \in]0;1[$ *et* X *une variable aléatoire. On appelle* *intervalle de fluctuation de* X *au seuil de confiance de* α *un intervalle* $[a;b]$ *tel que* $P(a \leq X \leq b) \geq \alpha$.

Exemple B

Dans une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules blanches, on effectue 100 tirages au hasard avec remise.
Le nombre X de boules rouges suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,4$.
La probabilité qu'on observe entre 31 et 50 boules rouges est

$$P(31 \leq X \leq 50) = P(X \leq 50) - P(X \leq 30) \approx 0,958.$$

Cela montre que l'intervalle $[31;50]$ est un intervalle de fluctuations au seuil de 95 % du nombre de boules rouges.
Concrètement, cela signifie simplement que sur une expérience, on a plus de 95 % de chance d'obtenir entre 31 et 50 boules rouges.

La loi binomiale permet de calculer facilement des intervalles de fluctuations au seuil de 95 % (95 % est un seuil souvent utilisé en probabilités, on peut bien entendu adapter la méthode pour tout autre seuil).
On cherche deux entiers a et b tels que $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$. Pour cela, on prendra les **plus petits entiers** a et b tels

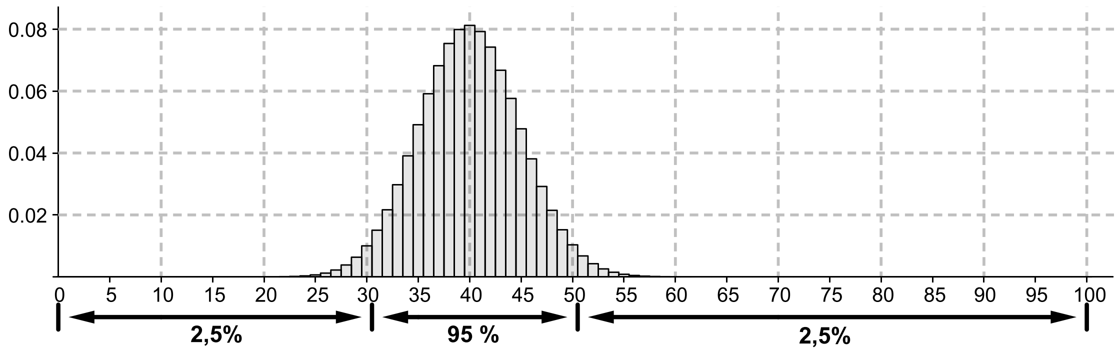
$$P(X \leq a) > 0,025 \text{ et } P(X \leq b) \geq 0,975.$$

En effet, puisque a est le plus petit entier vérifiant $P(X \leq a) > 0,025$, l'entier $a - 1$ ne vérifie pas cette propriété, il vérifie donc $P(X \leq a - 1) \leq 0,025$, d'où

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1) \geq 0,975 - 0,025 = 0,95.$$

Exemple B

On cherche deux entiers a et b tels que $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$.



À l'aide de la table de la calculatrice et de la méthode exposée précédemment, on constate que $a = 31$ est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et $b = 50$ est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$. Par conséquent on a $P(31 \leq X \leq 50) \geq 0,95$.
On retrouve bien l'intervalle de fluctuation $[31;50]$ « parachuté » en introduction de ce paragraphe.