Suites arithmétiques, suites géométriques

❖ Suites arithmétiques

Définition. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmétique si chaque terme se déduit du précédent ajoutant une constante r appelée raison de la suite.*
Une suite arithmétique vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$.

Théorème 1. Soit n et p deux entiers naturels, alors $u_n = u_p + (n-p)r$
En particulier $u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_1 + (n-1)r$.

On retiendra ce résultat sous la forme $u_n = u_p + (\text{différence des indices}) \times r$.

Démonstration.
Supposons dans un premier temps que $n \geq p$ et fixons l'entier naturel p. Montrons par récurrence la propriété suivante :

pour tout entier n vérifiant $n \geq p$, on a $u_n = u_p + (n-p)r$.

- Pour $n = p$, la propriété est vraie car $u_p + (p-p)r = u_p + 0 = u_p$.
- Supposons la propriété vraie pour un entier $n \geq p$ et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned} u_{\boldsymbol{n+1}} &= u_n + r && (u_n) \text{ est arithmétique} \\ &= u_p + (n-p)r + r && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= u_p + (n-p+1)r \\ &= u_p + (\boldsymbol{n+1}-p)r \end{aligned}$$

- La propriété est vraie pour $n = p$ et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout entier $n \geq p$.

Si $n < p$, on a en particulier $p \geq n$, donc d'après la première partie de la démonstration,

$$u_p = u_n + (p-n)r$$

d'où $u_n = u_p - (p-n)r$, puis $u_n = u_p + (n-p)r$, ce qui est la formule annoncée. ■

Théorème 2. Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$ et (u_n) une suite arithmétique. Alors

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}.$$

On retiendra ce résultat sous la forme

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (\text{nombre de termes de la somme}) \times (\text{moyenne des extrêmes}).$$

Pour effectuer la démonstration, nous aurons besoin du résultat suivant :

Résultat préliminaire. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$0 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La somme $0 + \cdots + n$ désigne la somme des entiers naturels de 0 à n. Pour l'écrire sans ambiguïté, il faudrait la noter $\sum_{k=0}^{n} k$.

Démonstration du résultat préliminaire. On procède par récurrence :

- Pour $n = 0$, la propriété est vraie car chaque membre vaut 0.
- Supposons la propriété vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$. La somme des entiers de 0 à $n + 1$ peut être découpée en la somme des entiers de 0 à n, à laquelle on ajoute $n + 1$:

$$\begin{aligned}
0 + \cdots + (n+1) &= (0 + \cdots + n) + (n+1) \\
&= \tfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \tfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \tfrac{(n+1)(n+2)}{2} && \text{factorisation par } n+1 \\
&= \tfrac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}+2)}{2} && \text{mise en évidence de } n+1
\end{aligned}$$

  ce qui est la propriété au rang $n + 1$.
- La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$. ■

Démonstration du théorème 2. À l'aide de la formule du théorème 1, écrivons chaque terme de la somme $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ en fonction de u_p et r, où r est la raison de (u_n).

$$\begin{aligned}
u_p &= u_p + 0r \\
u_{p+1} &= u_p + 1r \\
u_{p+2} &= u_p + 2r \\
\cdots & \qquad \cdots \\
u_n &= u_p + (n-p)r
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient, puisque cette somme comporte $n - p + 1$ termes :

$$\begin{aligned}
u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n &= \big(u_p + 0r\big) + \big(u_p + 1r\big) + \big(u_p + 2r\big) + \cdots + \big(u_p + (n-p)r\big) \\
&= \underbrace{u_p + u_p + u_p + \cdots + u_p}_{n-p+1 \text{ fois}} + 0r + 1r + 2r + \cdots + (n-p)r \\
&= (n-p+1)u_p + \big(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-p)\big)r
\end{aligned}$$

Or d'après le résultat préliminaire, on a $0 + 1 + 2 + \cdots + (n-p) = \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$. Par suite

$$\begin{aligned}
u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n &= (n-p+1)u_p + \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}r \\
&= (n-p+1)\left[u_p + \frac{n-p}{2}r\right].
\end{aligned}$$

Il reste à calculer le terme entre crochet :

$$u_p + \frac{n-p}{2}r = \frac{2u_p + (n-p)r}{2} = \frac{u_p + \big(u_p + (n-p)r\big)}{2} = \frac{u_p + u_n}{2}.$$

C'est bien la formule annoncée. ■

On pourrait objecter que la démonstration comporte des points de suspension et que par conséquent elle manque de rigueur. Recommençons, à l'aide des idées dégagées par la première démonstration.

Démonstration du théorème 2, sans points de suspension.
Soit p un entier fixé et montrons par récurrence sur l'entier n, que, pour $n \geq p$, on a

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\left[u_p + \frac{n-p}{2}r\right].$$

- Pour $n = p$, la propriété est vraie car le membre de gauche est u_p (il n'y a qu'un seul terme dans la somme), alors qu'à droite on a également u_p.
- Supposons la propriété vraie pour un entier $n \geq p$ et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned} u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n + u_{n+1} &= \left(u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n\right) + u_{n+1} \\ &= (n-p+1)\left[u_p + \frac{n-p}{2}r\right] + u_{n+1} \\ &= (n-p+1)\left[u_p + \frac{n-p}{2}r\right] + u_p + (n+1-p)r \\ &= (n-p+1)\underbrace{u_p} + \boldsymbol{(n-p+1)}\frac{n-p}{2}\boldsymbol{r} + \underbrace{u_p} + \boldsymbol{(n+1-p)r}. \end{aligned}$$

En factorisant les premier et troisième termes par u_p (terme souligné), et les deuxième et quatrième par $(n+1-p)r$ (terme en gras), il vient

$$\begin{aligned} u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n + u_{n+1} &= [(n-p+1)+1]u_p + (n-p+1)r\left[\frac{n-p}{2} + 1\right] \\ &= \overbrace{(n-p+2)}\,u_p + (n-p+1)r \times \frac{\overbrace{n-p+2}}{2} \\ &= (n-p+2)\left[u_p + \frac{(n-p+1)r}{2}\right] \\ &= (\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}-p+1)\left[u_p + \frac{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}-p}{2}r\right]. \end{aligned}$$

C'est la propriété au rang $n+1$, elle est héréditaire.

Enfin, comme dans la première démonstration, on finit en écrivant que

$$u_p + \frac{n-p}{2}r = \frac{2u_p + (n-p)r}{2} = \frac{u_p + \left(u_p + (n-p)r\right)}{2} = \frac{u_p + u_n}{2}.$$

Finalement

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\left[u_p + \frac{n-p}{2}r\right] = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}. \ \blacksquare$$

Devant la simplicité de la formule

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (\text{nombre de termes de la somme}) \times (\text{moyenne des extrêmes}),$$

on est en droit de penser que l'on est passés à côté d'une idée simple que ces déluges de calculs n'expliquent pas.

Démonstration du théorème 2, éclairante.

À l'aide la formule $u_k = u_p + (k-p)r$ dans laquelle on donne à k les valeurs p, $p+1$, ... $n-p$, la somme

$$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$$

peut être écrite

$$S = u_p + \left(u_p + r\right) + \left(u_p + 2r\right) + \cdots + \left(u_p + (n-p)r\right).$$

Écrivons S « à l'envers », c'est-à-dire

$$S = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_p.$$

En utilisant la formule $u_k = u_n + (n-k)r$, pour $k = n$, $n-1$, ..., p, on constate que l'on peut écrire

$$S = u_n + (u_n - r) + (u_n - 2r) + \cdots + (u_n - (n-p)r).$$

Mettons ces deux écritures de S l'une au-dessus de l'autre :

$$\begin{array}{ccccccccc} S = & \boxed{u_p} & + & \boxed{u_p + r} & + & \boxed{u_p + 2r} & + \dots + & \boxed{u_p + (n-p)r} \\ S = & \boxed{u_n} & + & \boxed{u_n - r} & + & \boxed{u_n - 2r} & + \dots + & \boxed{u_n - (n-p)r} \end{array}$$

En ajoutant en colonne on obtient donc

$$S + S = 2S = (u_p + u_n) + (u_p + r + u_n - r) + (u_p + 2r + u_n - 2r) + \cdots$$
$$+ (u_p + (n-p)r + u_n - (n-p)r).$$

Chaque somme entre parenthèse vaut $u_p + u_n$ et comme cette somme comporte $n - p + 1$ termes, on obtient

$$2S = (n - p + 1) \times (u_p + u_n),$$

d'où la formule

$$S = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}. \ \blacksquare$$

❖ Suites géométriques

Définition. *Une suite (u_n) est dite géométrique si chaque terme se déduit du précédent en multipliant par une constante q appelée raison de la suite.*
Une suite géométrique vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = qu_n$.

Théorème 3. Soit n et p deux entiers naturels, alors $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
En particulier $u_n = u_0 q^n$ et $u_n = u_1 q^{n-1}$.

On retiendra ce résultat sous la forme $u_n = u_p \times q^{\text{différence des indices}}$.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle pour les suites arithmétiques.

Théorème 4. Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$ et et (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Là aussi le résultat pourra se retenir sous la forme

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \text{premier terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes de la somme}}}{1 - q}.$$

Démonstration du théorème. On procède encore par récurrence sur n, l'entier p étant fixé. L'initialisation pour $n = p$ est claire, et si la propriété est acquise pour n, alors, grâce au théorème 3, on sait que $u_{n+1} = u_p q^{n+1-p}$, d'où

$$\begin{aligned} u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n + u_{\boldsymbol{n+1}} &= u_p \times \frac{1 - q^{p-n+1}}{1 - q} + u_p q^{n+1-p} = u_p \left[\frac{1 - q^{p-n+1}}{1 - q} + q^{n+1-p} \right] \\ &= u_p \times \frac{1 - q^{p-n+1} + (1 - q) q^{n+1-p}}{1 - q} \\ &= u_p \times \frac{1 - q^{p-n+1} + q^{n+1-p} - q^{n+2-p}}{1 - q} = u_p \times \frac{1 - q^{\boldsymbol{n+1}+1-p}}{1 - q}. \end{aligned}$$

C'est bien la formule annoncée pour $n + 1$. $\blacksquare$