Suites numériques – Partie 1

1. Définition et représentation graphique d'une suite (rappel)

Définition. *Une <u>suite numérique</u> u est une fonction dont la variable est un entier naturel. L'image d'un entier n n'est pas notée $u(n)$ mais u_n et se lit « u indice n ». On note alors souvent la suite (u_n) au lieu de u. On dit que u_n est le <u>terme général</u> de la suite et que n est l'<u>indice</u> de ce terme ou encore le <u>rang</u> de ce terme.*

Nous utiliserons essentiellement deux façons pour définir une suite : de manière fonctionnelle et par une relation récurrence.

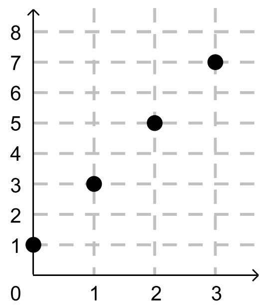
❖ Suite définie de manière fonctionnelle

On définit u_n directement par une formule en fonction de n.

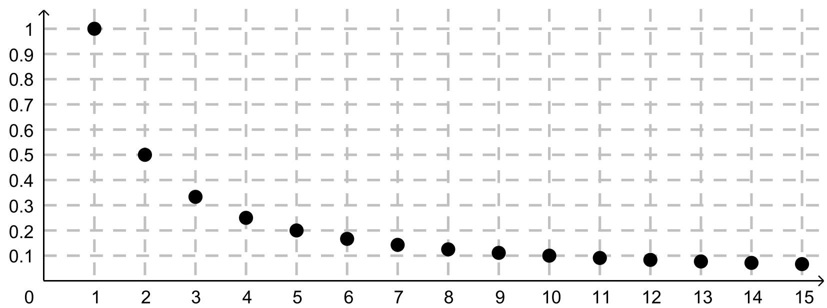
<u>Exemple</u>

- La suite des entiers impairs positifs 1, 3, 5, 7, … est la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 2n + 1$. En effet
  - $u_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$;
  - $u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$;
  - $u_2 = 2 \times 2 + 1 = 5, \ldots$

  C'est aussi la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = 2n - 1$.
  La représentation graphique de cette suite est l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$ pour $n \geq 1$.

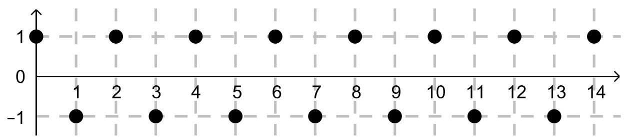


- La suite des inverses des entiers strictement positifs $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, est la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. C'est aussi la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = \frac{1}{n+1}$.



- La suite 1, −1, 1, −1, 1, −1, … est la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = (-1)^n$. En effet, $(-1)^n$ vaut 1 si n est pair et −1 sinon, donc on a bien

$$u_0 = (-1)^0 = 1, u_1 = (-1)^1 = -1, u_2 = (-1)^2 = 1, \ldots$$



❖ Suite définie par une relation de récurrence

Une suite est définie par récurrence quand elle définie par la donnée :

- de son premier terme ;
- d'une relation qui permet de calcul un terme à partir du précédent. Cette relation est appelée relation de récurrence.

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
Si l'on fait $n = 0$ dans la relation, on obtient $u_{0+1} = 3u_0 - 2$, soit

$$u_1 = 3 \times 2 - 2 = 4$$

De même, on obtient $u_2 = 3u_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$, puis $u_3 = 3 \times 10 - 2 = 28$, etc.

Si l'on appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$, on peut dire que la suite est définie par

$$u_0 = 2 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

En effet, chaque terme (sauf le premier) est l'image du précédent par la fonction f :

- $u_1 = 3u_0 - 2$, c'est-à-dire $u_1 = f(u_0) = f(2) = 3 \times 2 - 2 = 4$;
- $u_2 = 3u_1 - 2$, c'est-à-dire $u_2 = f(u_1) = f(4) = 3 \times 4 - 2 = 10$;
- etc.

Voici un algorithme permettant de calculer par exemple u_{10} ; ce sera la valeur de la variable u à l'issue de l'exécution de l'algorithme.

$u \leftarrow 2$	(valeur de la suite u pour $n = 0$)
Pour n de 1 à 10	(on va calculer u pour $n = 1, 2, 3\ldots, 10$)
$u \leftarrow 3u - 2$	(la nouvelle valeur de u est 3 fois l'ancienne valeur de u moins 2)
Fin Pour	

Voici la traduction de cet algorithme sous forme d'une fonction Python **suiteu(n)** qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie u_n.
On rappelle qu'en Python, si a et b sont des entiers, `range(a,b)` désigne l'ensemble des entiers compris entre a et $b - 1$, et non pas celui des entiers compris entre a et b comme on pourrait s'y attendre.

```
def suiteu(n):
   u=2
   for k in range(1,n+1):
      u=3*u-2
   return u
```

L'appel de cette fonction donnera par exemple :

```
>>> suiteu(2)
10

>>> suiteu(10)
59050
```

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{5} \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est la fonction définie par $f(x) = \frac{3x}{2x+1}$. On a

- $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}+1} = \frac{3}{7}$;
- $u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{3\times\frac{3}{7}}{2\times\frac{3}{7}+1} = \frac{9}{13}$;
- etc.

	A
1	0,2
2	0,4286
3	0,6923
4	0,8710
5	0,9529
6	0,9838
7	0,9945
8	0,9982
9	0,9994

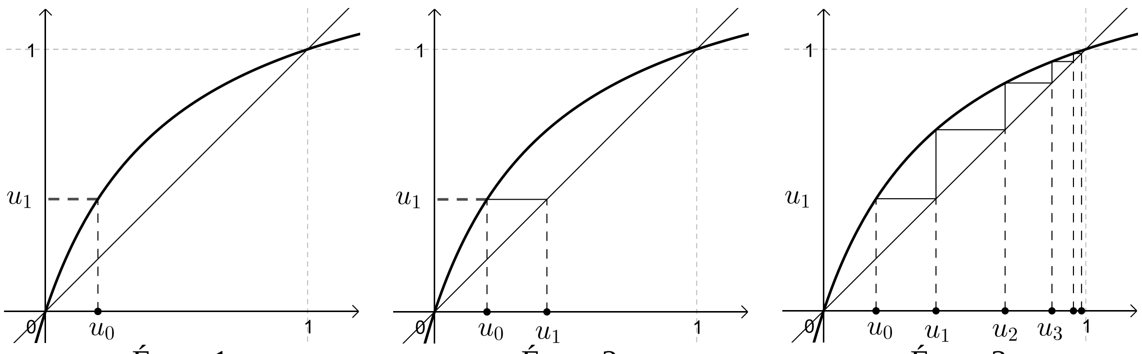
Pour varier les méthodes, utilisons le tableur pour calculer les termes de u_1 à u_8 de cette suite. Pour cela il suffit de saisir

- 0,2 dans la cellule A1 ;
- `=(3*A1)/(2*A1+1)` dans la cellule A2 ;

puis d'étendre la cellule A2 jusqu'en A9 grâce à la poignée de recopie.
On conjecture que la suite est croissante et que ses termes se rapprochent de 1 (avec le vocabulaire qu'on verra plus loin : « que la suite tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$).

Voyons sur cet exemple les représentations graphiques des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$. L'objectif est de représenter les termes de la suite sur l'axe des abscisses.
Pour cela on procède en plusieurs étapes,

- **Étape 1.** On représente graphiquement la fonction f, la droite Δ d'équation $y = x$ et on porte u_0 sur l'axe des ordonnées. Le terme u_1 se lit alors sur l'axe des ordonnées, puisque $u_1 = f(u_0)$.
- **Étape 2.** On reporte u_1 sur l'axe des abscisses grâce à la droite Δ qui a pour propriété d'être constituée des points ayant une abscisse égale à leur ordonnée ($y = x$!).
- **Étape 3**. On recommence avec u_1 pour obtenir u_2, et ainsi de suite.
  Pour améliorer la lisibilité de la figure on ne dessine que « l'escalier », puisque finalement il est inutile de porter les valeurs de la suite sur l'axe des ordonnées.



Étape 1 Étape 2 Étape 3

La conjecture émise par le calcul ressurgit ici : la suite semble être croissante, puisque l'escalier « monte », et avoir pour limite 1 car l'escalier « se stabilise » autour du point d'intersection de la courbe de f et de la droite Δ qui a visiblement 1 pour abscisse.
Il faudra repenser à cela lorsque nous étudierons le théorème du point fixe dans le paragraphe 8.

2. Sens de variation d'une suite (rappel)

❖ Sens de variation

Définition. *Une suite (u_n) est dite <u>décroissante</u> si pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$*
Une suite (u_n) est dite <u>croissante</u> si pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$
Une suite (u_n) est dite <u>constante</u> si pour tout n,$u_{n+1} = u_n$
Une suite (u_n) est dite montone si elle est croissante, décroissante ou constante.

Remarque.
1. Une suite peut ne pas être monotone. C'est le cas de la suite $(-1)^n$.
2. Une suite peut être monotone « à partir d'un certain indice », c'est-à-dire qu'il existe un entier n_0 tel que $(u_n)_{n\geq n_0}$ soit une suite monotone.

<u>Exemple</u>

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{n}{2^n}$. On a $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{3}{8}$, $u_4 = \frac{1}{4}$… Pour étudier les variations de (u_n) on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{2n}{2 \times 2^n} = \frac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \frac{1-n}{2^{n+1}}.$$

Il est clair que pour tout entier naturel n, on a $2^{n+1} > 0$ et, si $n \geq 1$, alors $1 - n \leq 0$, si bien que, pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, soit encore $u_{n+1} \leq u_n$.
Cela montre que la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 1.

3. Suites arithmétiques, suites géométriques (rappel)

❖ Suites arithmétiques

Définition. *Une suite (u_n) est dite <u>arithmétique</u> si chaque terme se déduit du précédent en ajoutant une constante r appelée <u>raison</u> de la suite.*
Une suite arithmétique vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$.

Théorème 2. Soit n et p deux entiers naturels, alors $u_n = u_p + (n-p) \times r$
En particulier $u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_1 + (n-1)r$.

On retiendra ce résultat sous la forme $u_n = u_p + (\text{différence des indices}) \times r$.

<u>Exemple</u>

Considérons la suite arithmétique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$. On a donc $u_1 = u_0 + 3 = 5$, puis par exemple $u_{100} = u_0 + 100 \times 3 = 305$.

Théorème 3. Soit (u_n) une suite arithmétique, n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. Alors

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_n + u_p}{2}.$$

On retiendra ce résultat sous la forme

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (\text{nombre de termes de la somme}) \times (\text{moyenne des extrêmes}).$$

Exemple

Calculons la somme des nombres impairs compris entre 81 et 227 inclus.
Tout d'abord, par un algorithme qui ne requiert aucune connaissance sur les suites. La valeur contenue dans S à la fin de l'exécution est la somme cherchée.

$I \leftarrow 81$	(I prendra les valeurs 81, 83, …, 227)
$S \leftarrow 81$	(S sera la somme des nombres impairs)
Tant que $I < 227$	(tant que le nombre impair 227 n'a pas été obtenu…
$\quad I \leftarrow I + 2$	… I est l'entier impair suivant)
$\quad S \leftarrow S + I$	(on ajoute I à la somme)
Fin Pour	

Utilisons maintenant le théorème précédent. Les entiers que l'on doit sommer, 81, 83, …, 227 sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2. Combien y en a-t-il ? Pour le savoir, on les numérote :

$$u_0 = 81, u_1 = 83, u_2 = 85, \ldots$$

et on cherche donc n tel que $u_n = 227$. Écrivons

- $u_0 = 81 + 2 \times 0$
- $u_1 = 81 + 2 \times 1$
- $u_2 = 81 + 2 \times 2$
- …
- $u_n = 81 + 2n$

On doit donc avoir $81 + 2n = 227$, d'où $n = \frac{227-81}{2} = 73$. Ainsi $u_{73} = 227$.
Finalement la suite 81, 83, 85, …, 227 est la suite (u_n) définie par $u_n = 81 + 2n$ pour $0 \leq n \leq 73$, elle comporte donc $73 - 0 + 1 = 74$ termes. Appliquons la formule :

$$S = 74 \times \frac{81 + 227}{2} = 11\,396.$$

❖ **Suites géométriques**

Définition. *Une suite (u_n) est dite <u>géométrique</u> si chaque terme se déduit du précédent en multipliant par une constante q appelée <u>raison</u> de la suite.*
Une suite géométrique vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = q \times u_n$

Théorème 4. Soit n et p deux entiers naturels, alors $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
En particulier $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

On retiendra ce résultat sous la forme $u_n = u_p \times q^{\text{différence des indices}}$.

Théorème 5. Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$ et et (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Là aussi le résultat pourra se retenir sous la forme

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \text{premier terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes de la somme}}}{1 - q}.$$

4. Raisonnement par récurrence

En mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n. Par exemple la proposition suivante :

$$\text{pour tout entier } n \geq 0, \text{ on a } 0 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

ou encore celle ci-dessous.

Exemple introductif

Soit x un nombre réel. On a admis dans le cours de Première sur la fonction exponentielle que pour tout entier naturel n, on a $(e^x)^n = e^{nx}$.

- Pour $n = 0$, cette propriété est vraie car $(e^x)^0 = 1$ et $e^{0\times x} = e^0 = 1$.
- Pour $n = 1$, cette propriété est clairement vraie, chaque membre vaut e^x.
- Pour $n = 2$, on peut écrire $(e^x)^2 = e^x \times e^x = e^{x+x} = e^{2x}$, en utilisant la formule $e^x e^y = e^{x+y}$ valable pour tous réels x et y.
- Pour $n = 3$, écrivons
$$(e^x)^3 = (e^x)^2 \times e^x.$$
Or nous venons de voir que $(e^x)^2 = e^{2x}$; ainsi
$$(e^x)^3 = e^{2x} \times e^x = e^{2x+x} = e^{3x}.$$
On s'est servi du fait que la propriété est vraie pour $n = 2$ pour montrer qu'elle est vraie pour $n = 3$.
- Plus généralement, supposons avoir montré que la propriété est vraie pour un entier $k \geq 0$. Alors est elle également vraie pour l'entier suivant $k + 1$ car
$$(e^x)^{k+1} = (e^x)^k \times e^x = e^{kx} \times e^x = e^{kx+x} = e^{(k+1)x}.$$
On dit que la propriété est **héréditaire**.

On conçoit alors que cela est suffisant pour affirmer que la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 0$. En effet, dès qu'elle est vraie pour un entier, elle est vraie pour le suivant. Or elle est vraie pour $n = 0$, donc par hérédité, elle est donc vraie pour $n = 1$. Mais comme elle est vraie pour $n = 1$, elle l'est aussi pour $n = 2$ par hérédité, etc.
Le raisonnement par récurrence formalise cette idée.

Théorème 1 (démonstration par récurrence). Considérons une propriété qui dépend d'un entier naturel n.

- Si cette propriété est vraie pour un entier n_0 ;
- s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier k supérieur ou égal à n_0, elle est aussi vraie pour l'entier suivant $k + 1$,

alors elle est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0.

Pour démonter qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on procède en deux étapes :

- **Initialisation**. On vérifie que la propriété est vraie pour n_0.
- **Hérédité.** On suppose que la propriété est vraie pour un entier $k \geq n_0$ (c'est l'**hypothèse de récurrence**) et on démontre qu'alors la propriété est vraie pour l'entier $k + 1$.

Exemple introductif (suite)

Soit x un nombre réel. Montrons par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, on a $(e^x)^n = e^{nx}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, cette propriété est vraie puisque chaque membre vaut 1.
- **Hérédité.** Supposons que la propriété soit vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $(e^x)^k = e^{kx}$, et montrons qu'alors elle est vraie pour l'entier suivant $k + 1$.
$$\begin{aligned}(e^x)^{\boldsymbol{k+1}} &= (e^x)^k \times e^x \\ &= e^{kx} \times e^x && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= e^{kx+x} && \text{car } e^x \times e^y = e^{x+y} \\ &= e^{(\boldsymbol{k+1})x}.\end{aligned}$$
Cela prouve que la propriété est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc d'après le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Exemple

Montrons par récurrence sur n que pour tout entier $n \geq 0$, on a $0 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, cette propriété est clairement vraie puisque chaque membre vaut 0.
- **Hérédité.** Supposons que la propriété soit vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $0 + 1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, et montrons qu'elle est vraie pour l'entier $k + 1$.
La somme des entiers de 0 à $k + 1$ peut être découpée en la somme des entiers de 0 à k à laquelle on ajoute $k + 1$:
$$\begin{aligned}0 + 1 + \cdots + k + (\boldsymbol{k+1}) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} && \text{factorisation par } k+1 \\ &= \frac{(\boldsymbol{k+1})(\boldsymbol{k+1}+1)}{2}\end{aligned}$$
On obtient bien la formule pour $k + 1$, cela prouve que la propriété est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc d'après le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Montrons par récurrence sur n que pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n = 3^n + 1$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, d'une part $u_n = u_0 = 2$ et d'autre part $3^0 + 1 = 2$, ce qui montre que la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité.** Supposons que la propriété soit vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $u_k = 3^k + 1$, et montrons qu'elle est vraie pour l'entier $k + 1$. On a
$$\begin{aligned}u_{\boldsymbol{k+1}} &= 3u_k - 2 && \text{par définition de } u_{k+1} \\ &= 3(3^k + 1) - 2 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3 \times 3^k + 3 - 2 \\ &= 3^{\boldsymbol{k+1}} + 1.\end{aligned}$$
Cela prouve que la propriété est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc d'après le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

5. Suites convergentes

Définition. *On dit qu'une suite* (u_n) *converge vers* ℓ *si tout intervalle ouvert contenant* ℓ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice.*

Exemple

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ et démontrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Cet intervalle contient intervalle de la forme $]a; b[$ avec $a < 0 < b$. il suffit donc de montrer qu'il existe un indice à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $]a; b[$.
Soit n_0 un entier supérieur à $\frac{1}{b}$; on a donc $\frac{1}{n_0} \leq b$. Pour tout entier $n \geq n_0$, il vient $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ d'où $\frac{1}{n} \leq a$ et enfin $\frac{1}{n} \in \,]a; b[$ puisque $\frac{1}{n} > 0$.

Remarque. L'intervalle doit être ouvert dans la définition pour traduire la notion intuitive de « limite ». Par exemple l'intervalle $[-1; 0]$ contient 0, mais ne contient aucun des termes de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$. Le fait que l'intervalle soit ouvert permet « d'avoir un peu de place » autour de la limite.

Théorème 6. Si une suite converge vers ℓ et ℓ', alors $\ell = \ell'$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers ℓ et ℓ', avec par exemple $\ell < l'$. Posons $I_1 = \left]\ell - 1; \frac{\ell+\ell'}{2}\right[$ et $I_2 = \left]\frac{\ell+\ell'}{2}; \ell' + 1\right[$. Comme $\ell < \frac{\ell+\ell'}{2} < \ell'$,

- l'intervalle ouvert I_1 contient ℓ, donc par définition il existe un indice n_1 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à I_1 ;
- l'intervalle ouvert I_2 contient ℓ', donc il existe un indice n_2 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à I_2.

Soit N le plus grand des entiers entre n_1 et n_2. Comme $N \geq n_1$, on a $u_N \in I_1$; comme $N \geq n_2$, on a $u_N \in I_2$. Ainsi $u_N \in I_1 \cap I_2$. Mais $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, c'est une contradiction.
De même on montre que l'inégalité $\ell > \ell'$ ne peut avoir lieu. Finalement $\ell = \ell'$ ■

Définition. *S'il existe un réel* ℓ *tel que* (u_n) *converge vers* ℓ*, on dit la suite* (u_n) *est convergente. On appelle* ℓ ***la limite*** *de* (u_n) *et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *(le théorème précédent assure l'unicité du réel* ℓ*)*
Une suite est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Théorème 7. Les suites de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \ldots$ admettent 0 pour limite.

La démonstration est analogue à l'exemple ci-dessus.

Théorème 8 (passage à la limite dans les inégalités). Soit (u_n) et (v_n) deux suites de limites ℓ et ℓ'. Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'on ait $\ell > \ell'$. Posons

$$I_1 = \left]\ell' - 1; \frac{\ell+\ell'}{2}\right[\text{ et } I_2 = \left]\frac{\ell+\ell'}{2}; \ell + 1\right[.$$

Puisque $\ell' < \frac{\ell+\ell'}{2} < l$, l'intervalle ouvert I_1 contient ℓ' et l'intervalle I_2 contient ℓ, donc il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que pour tout $n \geq n_1$, on ait $v_n \in I_1$ et pour tout $n \geq n_2$, on ait $u_n \in I_2$.
Posons $N = \max(n_0; n_1; n_2)$. On a $v_N \in I_1$ (puisque $N \geq n_1$) et $u_N \in I_2$ (puisque $N \geq n_2$), d'où $v_N < \frac{\ell+\ell'}{2} < u_N$, mais cela contredit $u_N \leq v_N$ obtenu par le fait que $N \geq n_0$. ■

Remarque. Le passage à la limite ne conserve par les inégalités strictes. Par exemple, si l'on pose pour $n \geq 1$, $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}$, on a $u_n < v_n$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

6. Limite infinie d'une suite

Définition. *On dit qu'une suite (u_n) a pour <u>limite $+\infty$</u> si pour tout réel A, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$ (les termes de la suite sont supérieurs à A à partir de l'indice n_0).*
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

<u>Exemple</u>

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ et démontrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Soit A un réel.

- Si $A < 0$, on a $u_n \geq 0 \geq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la définition est satisfaite avec $n_0 = 0$.
- Si $A \geq 0$, on a
$$u_n \geq A \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq A \Leftrightarrow n \geq A^2.$$
Ainsi, si l'on appelle n_0 un entier supérieur ou égal à A^2, on a bien
$$n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$$

Définition. *On dit qu'une suite (u_n) a pour <u>limite $-\infty$</u> si la suite $(-u_n)$ a pour limite $+\infty$.*
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 9. Les suites de terme général $\sqrt{n}$, n, n^2, n^3, … admettent $+\infty$ pour limite.

7. Opérations sur les limites

On considère deux suites (u_n) et (v_n). On veut déterminer, sans revenir aux définitions, les limites de $u_n + v_n$, $u_n v_n$ et $\frac{u_n}{v_n}$ à partir de celles de u_n et v_n. Les résultats suivants donnent la réponse, mais il existe des cas où l'on ne peut pas prévoir la limite, ce sont des formes indéterminées.
Bien sûr tout cela se démontre rigoureusement avec la définition des limites, mais c'est assez difficile en terminale. On admettra ces résultats qui sont intuitifs pour peu que l'on soit familiarisé avec les nombres.

- Règle sur la somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n} + n^2$ pour $n \geq 1$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, on en déduit par somme que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- Règle sur le produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$	$\ell\ell'$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

- Règle sur le quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	0 (*)	$\pm\infty$	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$ (**)	0	$\pm\infty$ (**)		

(*) Il faut supposer que $u_n > 0$ ou $u_n < 0$ à partir d'un certain indice.
(**) Le signe se détermine à l'aide de la règle des signes.

Exemple

- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 7n - 3$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 7$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} 7n = +\infty$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 = -3$, donc finalement par somme de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  En pratique pour une limite aussi simple, on ne donnera aucun détail sinon la rédaction devient vite fastidieuse.
- Soit (v_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $v_n = n^2 + 7n + \frac{1}{n}$.
  On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 7n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi par somme de limite on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Soit (w_n) la suite définie pour $n \geq 0$ par $w_n = 3 + 4n - n^2$. On se rend vite compte que l'on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ » si l'on ne modifie pas l'écriture.
  On factorise w_n par le terme « le plus fort », c'est-à-dire n^2 : pour $n \geq 1$, on a
  $$w_n = n^2\left(\frac{3}{n^2} + \frac{4n}{n^2} - \frac{n^2}{n^2}\right) = n^2\left(\frac{3}{n^2} + \frac{4}{n} - 1\right).$$
  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$, on a par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{n^2} + \frac{4}{n} - 1\right) = -1$, et comme de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, on conclut par produit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.
- Soit (z_n) la suite définie par $z_n = \frac{3n+4}{1-n}$ pour $n \geq 2$. De prime abord on est en présence d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ », on va donc modifier l'écriture pour voir « quel infini est le plus fort » entre le numérateur et le dénominateur. Pour ce faire, on factorise par « ce qu'il y a de plus fort » dans le numérateur et dans le dénominateur, puis on simplifie ces parties dominantes jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'indétermination.
  On écrit ici

$$z_n = \frac{n\left(3+\frac{4}{n}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-1\right)} = \frac{3+\frac{4}{n}}{\frac{1}{n}-1}.$$

Vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \frac{4}{n} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 1 = -1$, donc par quotient de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = -3$.

- Soit (t_n) la suite définie par $t_n = \frac{3n^3+4n}{1-n^2}$ pour $n \geq 2$. En suivant le même principe, écrivons

$$t_n = \frac{n^3\left(3+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}-1\right)} = n \times \frac{3+\frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-1}.$$

Vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \frac{4}{n^2} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = -1$, donc par quotient de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-1} = -3$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit finalement par produit que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty$.

8. Limite d'une suite géométrique

Le résultat suivant sera démontré dans le chapitre « Suites numériques, partie 2 », mais pour des raisons pratiques il est présenté dès maintenant.

Théorème 10 (limite de q^n). Soit q un réel.

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$;
- si $q = 1$, la suite (q^n) est constante égale à 1 ;
- si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$;
- si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

Exemple

Soit $u_n = \frac{5^n+1}{8^n}$. On peut écrire $u_n = \left(\frac{5}{8}\right)^n + \frac{1}{8^n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{5}{8}\right| < 1$ et aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{8^n} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^n = +\infty$ (ou encore en écrivant $\frac{1}{8^n} = \left(\frac{1}{8}\right)^n$ et en invoquant le fait que $\left|\frac{1}{8}\right| < 1$). Finalement par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple

Pour $n \geq 0$, on considère la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Par exemple $S_0 = 1$, $S_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

Si l'on pose $u_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on peut écrire

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

et comme (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, il vient

$$S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.

En remarquant que (S_n) peut être définie par la relation de récurrence $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}}$, avec la valeur initiale $S_0 = 1$, on peut écrire deux algorithmes sur cette suite.

```
S ← 1
Pour k de 1 à n
    S ← S + 1/2^k
Fin Pour
```

S contient la valeur de S_n à la fin de l'exécution

```
S ← 1
n ← 0
Tant que S ≤ 1,9999
    S ← S + 1/2^n
    n ← n + 1
Fin Tant Que
```

n contient le plus petit entier n tel que $S_n > 1{,}9999$ à la fin de l'éxecution

Exemple

Considérons la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$. Quelques essais à la calculatrice laissent penser que (u_n) converge vers -4. Pour arriver à ce résultat, on va « se ramener à 0 » comme il est fréquent de faire en mathématiques, en démontrant que la différence $u_n - (-4) = u_n + 4$ tend vers 0. En effet en écrivant

$$u_n = (u_n + 4) - 4$$

on aura bien montré que u_n converge vers -4 par somme de limites.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} + 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 = \frac{1}{2}(u_n + 4).$$

Cela montre que la suite $(u_n + 4)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc que sa limite est 0.