Suites numériques – Partie 1 – Exercices

Révision sur les suites

1 Calculer les 4 premiers termes des suites suivantes et écrire un algorithme permettant de calculer u_{10}.

1. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$

2. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par
$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

3. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par
$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{n}{u_n+1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

4. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$u_1 = 1, u_2 = 2 \text{ et } u_{n+2} = nu_n + u_{n+1} \text{ pour } n \geq 1.$$

2 On étudie deux contrats de travail.

- Contrat A : le salaire mensuel est de 1200 € au 1er janvier 2021 et augmente de 70 € au premier janvier de chaque année.
- Contrat B : le salaire mensuel est de 1000 € au 1er janvier 2021 et augmente de 8% au premier janvier de chaque année.

On note u_n le salaire mensuel du contrat A et v_n le salaire mensuel du contrat B, en l'année $2021 + n$.

1. Calculer les 4 premiers termes de (u_n). Quelle est la nature de (u_n) ? Donner le salaire mensuel en 2037 et calculer l'argent gagné entre janvier 2021 et décembre 2037.

2. Mêmes questions avec (v_n).

3 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = 1 + 2u_n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
Justifier que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = u_n + 1$.

a. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.

b. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a $v_{n+1} = 2v_n$.

c. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.

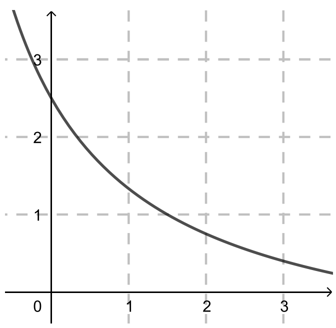
4 $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$. Soit $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 puis v_0, v_1, v_2, v_3.

2. Démontrer que (v_n) est arithmétique.

3. En déduire l'expression de (v_n), puis celle de (u_n), en fonction de n.

5 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5-x}{x+2}$.



1. Utiliser la courbe de f ci-contre pour placer les 5 premiers termes de (u_n) sur l'axe des abscisses.

2. Calculer les 5 premiers termes.

Raisonnement par récurrence

6 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 9.$$
Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-2)^{n+1} + 3.$$

7 (Importance de l'initialisation).

1. Montrer que les deux propositions « $10^n - 1$ est un multiple de 9 » et « $10^n + 1$ est un multiple de 9 » sont héréditaires.

2. Existe-t-il $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que ces propositions soient vraies pour $n \geq n_0$?

8 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par
$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

1. Calculer les 4 premiers termes.

2. Écrire un algorithme permettant de calculer u_{20} et le programmer.

3. Émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n. La démontrer par récurrence.

9 *(2013, métropole).* Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ pour $n \geq 0$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite. Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation ?

2. a. Montrer que pour tout entier n on a $u_n \leq n + 3$.

b. Montrer que pour tout entier n on a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$
et en déduire le sens de variation de (u_n).

3. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = u_n - n$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

10 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right)$$

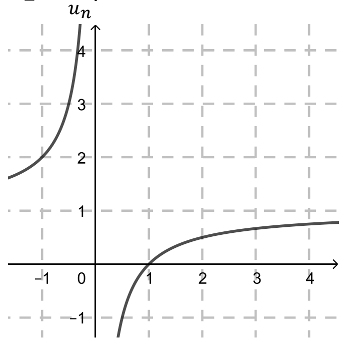
1. Étudier les variations sur $]0; +\infty[$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$ et en déduire que
$$\forall x \in [2; 4], f(x) \in [2; 4].$$

2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2; 4]$.

11 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$
$$1 - 3 + 5 - \dots + (-1)^{n-1}(2n - 1) = n(-1)^{n-1}.$$

12 On considère la suite (u_n) définie par la donnée de u_0, différent de 0 et 1, et la relation de récurrence :
$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}.$$

1. On a représenté ci-contre la courbe de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.
Représenter en rouge les 6 premiers termes de (u_n) pour $u_0 = 2$ et en vert les 6 premiers termes de (u_n) pour $u_0 = 4$.



2. Calculer u_k pour $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ si $u_0 = 2$, puis si $u_0 = 131$. Que peut-on conjecturer pour cette suite ?

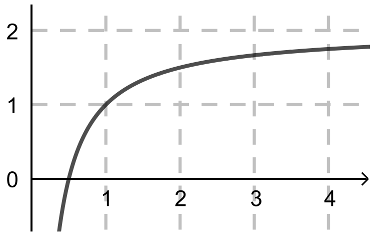
3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_n$.

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{3n} = u_0$. Donner des formules similaires pour u_{3n+1} et u_{3n+2}.
5. Déterminer u_{2000} dans le cas où $u_0 = 131$.
6. Existe-t-il des valeurs de u_0 tel que $u_0 = u_1$?

13 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}.$$

1. On a représenté ci-contre la courbe de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Représenter les 4 premiers termes de (u_n) sur l'axe des abscisses puis les calculer.



2. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+2}{n+1}.$$

14 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \frac{3}{u_n}.$$

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{15(-3)^n + 1}{5(-3)^n - 1}.$$

15 Démontrer que pour entier naturel n on a

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

16 (Récurrence forte). On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$, $u_1 = 7$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n.$$

On veut montrer que pour tout entier n on a

$$u_n = 5^n + 2^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère pour la proposition P_n « pour tout entier $k \leq n$, $u_k = 5^k + 2^k$ ».
1. Montrer P_0 et P_1 sont vraies.
2. Montrer que P_n est héréditaire à partir du rang 1 et conclure.

Suites convergentes, limite infinie d'une suite

17 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \frac{7}{n+1}$.
Donner un indice à partir duquel on a $0 < u_n \leq 0{,}0001$.

18 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$.
1. Donner un indice à partir duquel on a $u_n \in]1{,}99; 2{,}01[$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

19 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = 3n^2$.
1. Donner un indice à partir duquel $u_n \geq 300$.
2. Donner un indice à partir duquel $u_n \geq 10000$.
3. Donner un indice à partir duquel $u_n \geq A$ où $A \in \mathbb{R}$.

20 Vrai ou faux. Justifier.
a. Si (u_n) converge vers 0, alors $u_n = 0$ à partir d'un certain indice.
b. Si $u_n = 0$ à partir d'un certain indice, alors (u_n) converge vers 0.
c. Si (u_n) converge vers 1 et si (v_n) converge vers 2, alors à partir d'un certain indice $u_n < v_n$.
d. Si (u_n) converge vers ℓ et qu'à partir d'un certain indice on a $u_n < M$, alors $\ell < M$.
e. Toute suite à termes strictement positifs qui converge vers 0 est décroissante.
f. Une suite croissante a pour limite $+\infty$.
g. Toute suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain indice.

Opérations sur les limites

21 Déterminer les limites des suites suivantes.
a. $u_n = (1-n)(n+3)$ **b.** $u_n = \frac{2}{1+n}$
c. $u_n = 3n + 1 - \frac{4}{\sqrt{n}}$ **d.** $u_n = \left(\frac{1}{n} - 3\right)^2$

22 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par

$$u_n = \frac{2}{n}(1+n^2) \text{ et } v_n = 3n^2 - 5n.$$

1. Déterminer la limite de u_n.
2. Déterminer la limite de v_n.

23 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ suivantes.
a. $u_n = -n^2 + \sqrt{n}$ **b.** $u_n = -3n^2 + 7n + 4$
c. $u_n = \frac{2n+1}{3n^2+1}$ **d.** $u_n = \frac{-3n^2-n+7}{2n^2-1}$
e. $u_n = \frac{4n^3-5}{2n^2+1}$ **f.** $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(-4n+3)$
g. $u_n = \frac{5-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$ **h.** $u_n = \frac{1+\sqrt{n}}{3n^2}$

24 Vrai ou faux. Justifier.
a. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.
b. Si (u_n) est une suite à termes strictement positifs telle que $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge, alors elle est convergente.
c. Si (u_n) est une suite convergente et (v_n) une suite divergente, alors $(u_n v_n)$ est une suite divergente.
d. Si $(u_n v_n)$ converge vers un réel et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Limite d'une suite géométrique

25 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ suivantes.
a. $u_n = \left(\frac{12}{17}\right)^n$ **b.** $u_n = \frac{2\times 4^n}{5^n}$
c. $u_n = \frac{(-1)^n}{4\times(-0{,}1)^n}$ **d.** $u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

26 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ suivantes.
a. $u_n = 5^n - 3^n$ **b.** $u_n = 3^n + (-2)^n - 7$

27 Déterminer les limites des suites suivantes.
a. $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$
b. $u_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$

28 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Afficher les 10 premiers termes de (u_n) sur la calculatrice. Quelle semble être la limite de (u_n) ?
2. Démontrer que pour tout entier n, $u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$.
3. Démontrer la conjecture de la question 1.

Problèmes

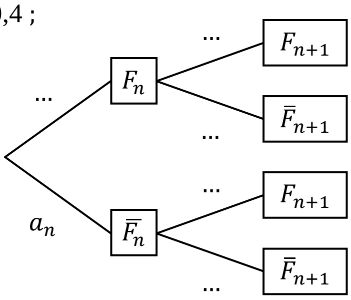
29 *(2019, Asie).* La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Une tasse de café est servie à une température initiale de 80° C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Pour entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :
$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M).$$
où k est une constante réelle.
On choisit $M = 10$ et $k = -0{,}2$.

1. D'après le contexte, conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n,
$$T_{n+1} = 0{,}8T_n + 2.$$
3. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = T_n - 10$.
  a. Montrer que (u_n) est une suite géometrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
  b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10.$$
  c. Déterminer la limite de la suite (T_n).
4. On considère l'algorithme suivant :

```
T ← 80
n ← 0
Tant que T > 40
    T ← 0,8T + 2
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

30 Pierre a décidé d'arrêter de fumer. On admet que
- s'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,4 ;
- s'il fume un jour, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,9.



Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements
- F_n : « Pierre fume le $n^{\text{ième}}$ jour » ;
- $\bar{F}_n$: « Pierre ne fume pas le $n^{\text{ième}}$ jour ».

On note $a_n = P(\bar{F}_n)$ la probabilité que Pierre ne fume pas le $n^{\text{ième}}$ jour . Aujourd'hui Pierre ne fume pas, donc $a_1 = 1$.

1. a. Compléter l'arbre ci-dessus.
  b. Calculer a_2 et a_3.
  c. Montrer que $a_{n+1} = -0{,}5a_n + 0{,}9$.
  d. Écrire un algorithme en Python pour afficher les dix premiers terme de (a_n).
2. On pose $u_n = a_n - 0{,}6$.
  a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_1.
  b. Exprimer u_n en fonction de n et en déduire l'expression de (u_n) en fonction de n.
  c. Déterminer la limite de (a_n) et interpréter.
  d. Justifier que pour tout réel $e > 0$, il existe n_0 tel que
$$n \geq n_0 \Rightarrow 0{,}6 - e < a_n < 0{,}6 + e \quad (*).$$
Écrire un algorithme retournant le plus petit entier n_0 vérifiant $(*)$.

31 Sur une droite D munie d'un repère $(O; \vec{\imath})$, on considère la suite de point (A_n) ainsi définie :
- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note a_n l'abscisse de A_n.
1. En prenant 10 cm comme unité, représenter les points A_i pour $0 \leq i \leq 5$ et calculer les a_i correspondants.
2. Justifier l'égalité : $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ pour tout n.
3. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier naturel n et renvoyant a_n.
4. Montrer que $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$ pour tout n.
5. Soit $u_n = a_n - \frac{2}{3}$. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
6. En déduire la limite de (u_n) puis celle de (a_n).

32 On considère la suite de nombres entiers
$$u_1 = 16,\ u_2 = 1156,\ u_3 = 111\,556,$$
$$u_4 = 11\,115\,556, \dots$$
où l'on passe de u_n à u_{n+1} en intercalent 1 et 5 « au milieu » de u_n.
1. Soit le nombre $a_n = \underbrace{11 \dots 11}_{n \text{ chiffres}}$ constitué de n fois le chiffre 1.
Écrire a_n comme la somme des termes d'une suite géométrique dont on indiquera le premier terme et la raison et en déduire que $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$.
2. Déterminer la racine carrée de chacun des quatre premiers termes de (u_n). Qu'observe-t-on ? Quelle est probablement la racine carrée de u_5 ? u_{10} ? de u_n ?
3. Pour $n \geq 1$, soit A_n le nombre qui s'écrit avec $n-1$ chiffres 3 suivis d'un chiffre 4. Montrer grâce à la question **1.** que $A_n^2 = a_{2n} + 4a_n + 1$.
4. Démontrer la conjecture émise à la question **2.**

33 Soit la suite (u_n) donnée par u_0, u_1 et la relation
$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$$
On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 1$.
1. Dans cette question, on suppose $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.
  a. Calculer u_2, u_3 et u_4.
  b. Écrire un algorithme qui calcule u_n.
2. On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 1$.
  a. Montrer que $v_{n+1} = -\frac{1}{n}v_n$ pour $n \geq 1$ et en déduire une expression de v_n en fonction n et v_1.
  b. En déduire une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

34 Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le n^{e} nombre harmonique par
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a
$$1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n.$$