Limites de fonctions et continuité

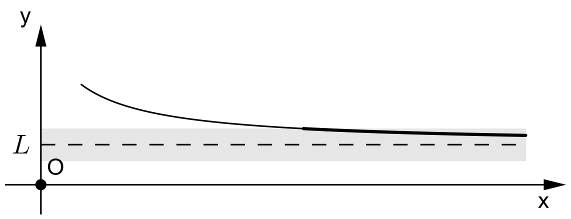
1. Limite en l'infini d'une fonction et asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ et L un réel.

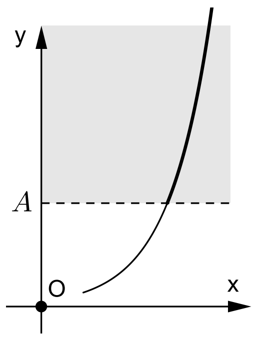
Définition.

1. *Si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand, on dit que la fonction f admet L pour limite en $+\infty$, on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.*
2. *Si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand, on dit que la fonction f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*
3. *Si tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand, on dit que la fonction f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.*

Interprétation graphique. Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, la courbe représentant f devient aussi proche que l'on veut de la droite d'équation $y = L$ lorsque x est assez grand.



Si x est assez grand, toutes les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches de L que l'on veut, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.



Si x est assez grand, les valeurs de $f(x)$ sont aussi grandes que l'on veut, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Définition. *Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$), on dit que la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

On définit de même les limites en $-\infty$ en remplaçant « dès que x est assez grand » par « dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue ». Ainsi par exemple, on a la définition suivante.

Définition. *Si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue, on dit que la fonction f admet L pour limite en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.*

Exemple

Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Prenons un intervalle petit centré en 0, par exemple

$]-0{,}1;0{,}1[$. On remarque si $x\in]10;+\infty[$, alors $\frac{1}{x}\in]-0{,}1;0{,}1[$.
Plus généralement, si on prend n'importe quel intervalle contenant 0, de la forme $]-\varepsilon;\varepsilon[$ où ε est un réel strictement positif, alors $x\in\left]\frac{1}{\varepsilon};+\infty\right[\Rightarrow\frac{1}{x}\in]-\varepsilon;\varepsilon[$, ce qui par définition traduit le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Exemple (à connaître)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$, où n est un nombre entier strictement positif.
L'axe des abscisses est asymptote horizontale aux courbes des fonctions $x\mapsto\frac{1}{x}$, $x\mapsto\frac{1}{x^n}$ en $+\infty$ et $-\infty$ et en $+\infty$ à la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Exemple

Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-contre.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
variations de f	5 ↘	-1	↗ 2

On y apprend que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ et donc que la droite d'équation $y=5$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et $y=2$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

2. Limite en un réel d'une fonction et asymptote verticale

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r;a]$ ou $[a;a+r[$, avec r un réel strictement positif.

Définition.

1. *Si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche de a, on dit que <u>la fonction f admet L pour limite en a</u> et on note*
$$\lim_{x\to a}f(x)=L.$$
2. *Si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche de a, on dit que <u>la fonction f admet $+\infty$ pour limite en a</u> et on note*
$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty.$$
3. Si *tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche a, on dit que <u>la fonction f admet $-\infty$ pour limite en a</u> et on note*
$$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty.$$

En pratique on est souvent amené à étudier séparément les limites de f pour $x<a$ et pour $x>a$. On parle alors de « limite à gauche en a » et de « limite à droite en a ». On note respectivement $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)$.

Exemple

Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$. Soit A un réel positif. Pour $x>0$, on a $\frac{1}{x}>A\Leftrightarrow x<\frac{1}{A}$. Donc si $x \in \left]0; \frac{1}{A}\right[$, on a $\frac{1}{x} > A$, ce qui prouve que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

Montrons maintenant que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$. Soit A un réel négatif. Pour $x < 0$, on a l'équivalence $\frac{1}{x} < A \Leftrightarrow x > \frac{1}{A}$, donc $x \in \left]\frac{1}{A}; 0\right[$ implique $\frac{1}{x} < A$, ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$.

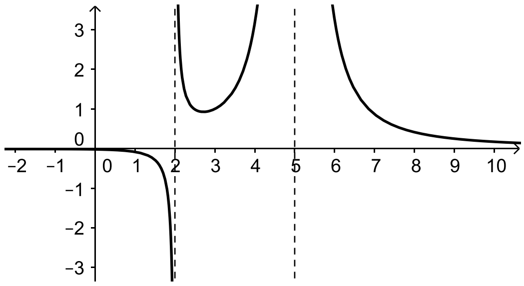
Définition. *Lorsque* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$*, on dit que la droite d'équation* $x = a$ *est* <u>*asymptote verticale*</u> *à la courbe représentative de la fonction* f*.*

<u>Exemple</u>

On donne la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f ci-contre. On a

$$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty \;;\; \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$$

et $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = +\infty$.



Par conséquent les droites d'équations $x = 2$ et $x = 5$ sont asymptotes verticales à $\mathcal{C}_f$.

De plus avec les notions du paragraphe précédent,

$$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Théorèmes sur les limites

❖ **Limites des fonctions usuelles**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.
  Plus généralement,
  - Si $n \geq 1$ est pair, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$;
  - Si $n \geq 1$ est impair, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

❖ **Opérations sur les limites**

Dans ce paragraphe, L et L' sont des réels, et le réel a peut être remplacé par $-\infty$ ou $+\infty$.

➢ Règle sur la somme

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	L'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$	$L + L'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Exemple

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x} + x^2$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on en déduit par somme que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- Règle sur le produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	$L \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	LL'	$+\infty$ si $L > 0$ $-\infty$ si $L < 0$	$-\infty$ si $L > 0$ $+\infty$ si $L < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

- Règle sur le quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	L	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L' \neq 0$	0 (*)	$\pm\infty$	L'	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{L}{L'}$	$\pm\infty$ (**)	0	$\pm\infty$ (**)		

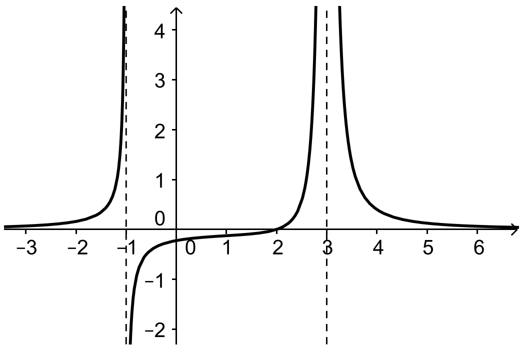
(*) Il faut supposer que g a un signe constant au voisinage de a.
(**) Le signe dépend de celui de $f(x)$ et $g(x)$ lorsque x tend vers a, voir exemple.

Exemple

Soit f la fonction définie sur

$$]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$$

par $f(x) = \frac{x-2}{(x+1)(x-3)^2}$.



Pour étudier la limite de f par exemple en -1, on étudie la limite du numérateur et du dénominateur puis on applique la règle du quotient. On a

$$\lim_{x\to-1} (x-2) = -3$$

mais pour comme le dénominateur tend évidemment vers 0, il est nécessaire de savoir s'il tend vers 0 en étant positif ou négatif. Pour cela, on étudie le signe du dénominateur :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)^2$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(x-3)^2$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Par conséquent

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} (x+1)(x-3)^2 = 0^- \text{ et } \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} (x+1)(x-3)^2 = 0^+$$

d'où par quotient,

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty.$$

De même $\lim\limits_{x\to3} (x-2) = 1$ et (d'après le tableau) $\lim\limits_{x\to3} (x+1)(x-3)^2 = 0^+$, d'où

$$\lim_{x\to3} f(x) = +\infty.$$

- **Limites en l'infini d'un polynôme ou d'un quotient de deux polynômes**

Exemple

Déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = x^5 + x^2$. On factorise par le terme de plus haut degré : $f(x) = x^5\left(1 + \frac{x^2}{x^5}\right) = x^5\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, on a par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple

Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-x^2}{x^3+1}$. On factorise par les termes de plus haut degré et on simplifie : $f(x) = \frac{x^2\left(\frac{2}{x}-1\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{x} \times \frac{\frac{2}{x}-1}{1+\frac{1}{x^3}}$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$, on a par opérations sur les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}-1}{1+\frac{1}{x^3}} = -1$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

- **Théorèmes de comparaison**

Théorème (de comparaison). Soit a un réel avec éventuellement $a = -\infty$ ou $a = +\infty$ et f une fonction.
Si pour x proche de a on a
1. $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
2. $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Théorème (des gendarmes). Soit a et ℓ deux réels avec éventuellement $a = -\infty$ ou $a = +\infty$ et f, g, h trois fonctions.
Si pour x proche de a on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

4. Composition de fonctions et limites

Définition. *Soit f une fonction définie sur intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telle que pour tout $x \in J$, on a $g(x) \in I$.*
La fonction définie sur J par $x \mapsto f\big(g(x)\big)$ s'appelle fonction composée de g suivie de f et se note $f \circ g$. On lit « f rond g ».

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 1$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x}$. Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2\big(g(x)\big)^2 + 1 = 2(e^{2x})^2 + 1 = 2e^{4x} + 1$;
- $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = e^{2f(x)} = e^{4x^2+2}$.

Exemple

Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=1-x^2$.

- Pour que $f\circ g$ soit définie, il et il suffit que $g(x)\geq 0$. Ainsi, après une étude de signe d'un trinôme du second degré, $f\circ g$ est définie sur $[-1;1]$ et pour tout réel x de cet intervalle, on a $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\sqrt{1-x^2}$.
- La fonction $g\circ f$ est définie sur $[0;+\infty[$ par
$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=1-\left(\sqrt{x}\right)^2=1-x.$$

Théorème. Soit a, b, c trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big)=c$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}+x}$. Déterminons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
On a $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$, donc par somme $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+x\right)=+\infty$.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Exemple

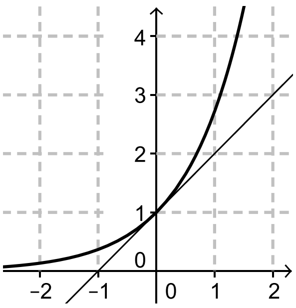
Soit $f(x)=\left(2+\frac{1}{x}\right)^4$, déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$, puis $\lim\limits_{x\to 2} x^4=2^4=16$, donc par composition de limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=16$.

5. Limites liées à la fonction exponentielle

❖ **Limites de la fonction exponentielle**

Lemme. Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$, on a $\exp x\geq x+1$.

Cette inégalité traduit le fait que la courbe de la fonction exponentielle est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0. En effet l'équation de cette tangente est $y=\exp'(0)(x-0)+e^0$, soit $y=x+1$.
Nous verrons plus tard dans l'année que cela traduit la convexité de la fonction exponentielle.



Démonstration. Soit f la fonction définie par $f(x)=\exp x-x-1$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\exp x-1$. On a
$$f'(x)>0\Leftrightarrow \exp x>1\Leftrightarrow \exp x>\exp 0\Leftrightarrow x>0,$$
donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, elle atteint son minimum en 0 et il vaut $f(0)=0$. Par suite pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\exp x-x-1\geq 0$ et donc $\exp x\geq x+1$. ■

Théorème. On a les limites remarquables suivantes
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Démonstration. D'après le lemme et en utilisant le fait que $\lim_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, il résulte du théorème de comparaison que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
Enfin pour montrer que $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, on écrit que $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$. On a $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc par composition $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ puis $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$. ■
Le tableau de variation complet de la fonction exponentielle est donc le suivant.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
exp	$0 \nearrow +\infty$

❖ **Croissance comparée**

Théorème. Pour tout entier naturel n, on a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0.$$

On dit communément que « l'exponentielle l'emporte sur les puissances ».

Démonstration.
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x \geq x+1$, d'où $e^x \geq x$ et donc, en prenant $\frac{x}{n+1}$ à la place de x, on obtient l'inégalité $e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1}$.
En supposant $x > 0$ et en élevant à la puissance $n+1$, il vient $e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$, donc en divisant par x^n, on a $\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$ (ne pas oublier que $(n+1)^{n+1}$ est une constante puisque n est fixé), il vient d'après le théorème de comparaison $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
Écrivons
$$x^n e^x = \left(-(-x)\right)^n \times \left(-\frac{1}{e^{-x}}\right) = (-1)^{n+1}(-x)^n \frac{1}{e^{-x}} = (-1)^n \times \frac{1}{\frac{e^{-x}}{(-x)^n}}.$$
Comme $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, on a par composition $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$. ■

6. Continuité

Définition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*
On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I.

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Exemple

- La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

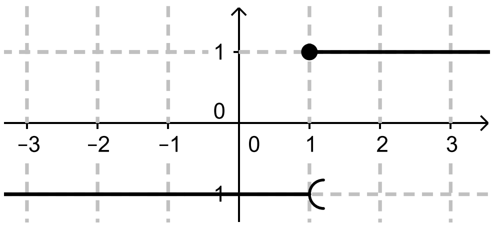
Exemple

Soit la fonction $f: x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 1 \\ -1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$.

Elle est clairement continue sur $]-\infty;1[$ et sur $[1;+\infty[$. En revanche

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -1 = -1 \neq f(1)$$

ce qui montre que f n'est pas continue en 1.



Théorème. Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

7. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (des valeurs intermédiaires). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire que pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution sur $[a;b]$.

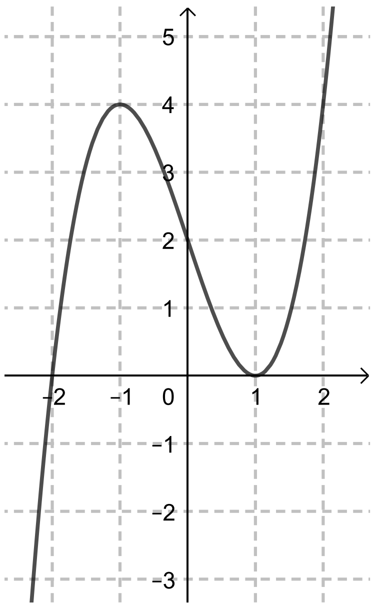
Exemple A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et intéressons-nous à l'équation $f(x) = 3$.

L'observation du graphique permet de se rendre compte qu'une solution semble être comprise entre -2 et-1. La justification est simple : « la fonction f est continue (car dérivable) sur $[-2;-1]$ et de plus $3 \in [f(-2);f(-1)]$ car $f(-2) = 0$ et $f(-1) = 4$. Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet <u>une</u> solution sur $[-2;-1]$ ».

Par le même raisonnement on justifie qu'il y a <u>une</u> solution sur $[-1;0]$ et <u>une</u> solution sur $[1;2]$, ce qui porte à au moins trois le nombre de solution de l'équation $f(x) = 3$ sur $\mathbb{R}$.

Néanmoins ce raisonnement ne montre pas qu'il n'existe <u>que</u> trois solutions à cette équation, ce sont les variations de f et le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (abrégé en TVI dans la suite) qui permettront de le justifier (voir ci-dessous).



Théorème (extension aux intervalles ouverts). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b[$ (avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$) et admettant une limite finie ou infinie en b. Alors f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.

Exemple A

Il est facile de vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi $10^{30} \in \left[f(1); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une solution à l'équation $f(x) = 10^{30}$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

En rajoutant l'hypothèse de monotonie stricte, on obtient le résultat suivant, le plus utilisé en pratique.

Corollaire du TVI. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Alors f prend une et une seule fois toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire que pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel c tel que $f(c) = k$.

Remarque.

1. Si la fonction continue f n'est pas strictement monotone sur $[a; b]$, toute valeur c comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est prise par f, mais pas nécessairement une seule fois comme le montre l'exemple précédent de la fonction f qui prend (au moins) trois fois la valeur 3.
2. Si la fonction n'est pas continue, il se peut que toutes les valeurs comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ ne soient pas prises par f, même si la fonction est strictement monotone.

Convention. On conviendra que dans un tableau de variation, les flèches traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Exemple A

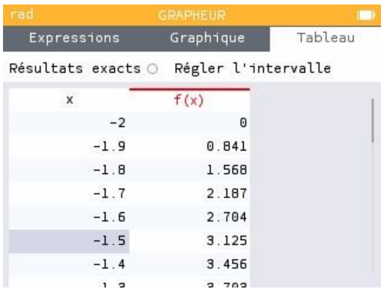
On a $f'(x) = 3x^2 - 3$, donc $f'(x)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont -1 et 1, d'où le tableau de variation de f, qu'on a complété avec les limites obtenues en écrivant que pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$.

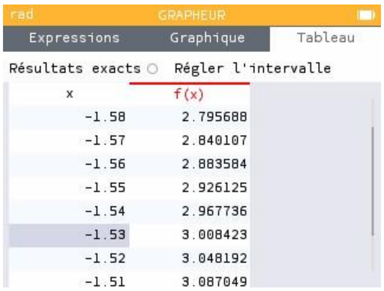
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Sur l'intervalle $]-\infty; -1]$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus $3 \in \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); f(-1)\right]$, donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α_1 sur $]-\infty; -1]$.
- Sur l'intervalle $[-1; 1]$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante. De plus $3 \in [f(1); f(-1)]$, donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α_2 sur $[-1; 1]$.
- Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus $3 \in \left[f(1); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$, donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α_3 sur $[1; +\infty[$.
- Finalement l'équation $f(x) = 3$ admet exactement trois solutions sur $\mathbb{R}$.

À présent cherchons un encadrement, par la méthode du « balayage » de chacune de ces solutions à 0,01 près, par exemple de α_1.
L'observation du graphique permet de constater que $-2 \leq \alpha_1 \leq -1$. On affiche ensuite la

table des valeurs de f sur $[-2;-1]$ avec un pas de 0,1 et on constate que les valeurs de f deviennent supérieures à 3 entre $-1{,}6$ et $-1{,}5$, d'où $-1{,}6 \leq \alpha_1 \leq -1{,}5$. On change alors les paramètres de la table de f, en affichant ses valeurs entre $-1{,}6$ et $-1{,}5$ avec un pas de 0,01. Finalement $-1{,}54 \leq \alpha_1 \leq -1{,}53$.
De même, on trouve $-0{,}35 \leq \alpha_2 \leq -0{,}34$ et $1{,}87 \leq \alpha_3 \leq 1{,}88$.





Le TVI est un théorème d'existence, il ne faut pas l'utiliser pour justifier qu'une équation n'a pas de solution ! Dans ce dernier cas, ce sont les variations qui permettent de le justifier.

Exemple A

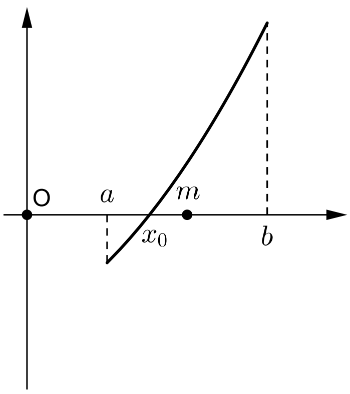
Justifions que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

- D'après les variations de f, le maximum de f sur $]-\infty;1]$ est $f(-1) = 4 < 5$, donc l'équation $f(x) = 5$ n'admet pas de solution sur $]-\infty;1]$.
- Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus $5 \in \left[f(1); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$, donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur $[1;+\infty[$.

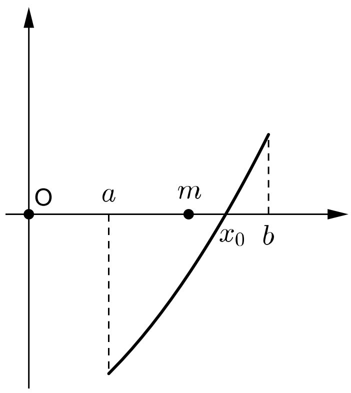
❖ Algorithme de dichotomie

On considère une fonction f définie sur un intervalle $[a;b]$. On suppose que f est monotone et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0.
Pour trouver un encadrement à ε près de x_0, on calcule le milieu $m = \frac{a+b}{2}$ de l'intervalle $[a;b]$, puis on réduit l'intervalle de moitié : $[a;m]$ ou $[m;b]$ selon le signe de $f(a)$ et $f(m)$:

- si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signe opposé, c'est-à-dire $f(a)f(m) \leq 0$, alors $x_0 \in [a;m]$;
- si $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe, c'est-à-dire $f(a)f(m) \geq 0$, alors $x_0 \in [m;b]$.



Cas $f(a)f(m) < 0$



Cas $f(a)f(m) \geq 0$

On a donc l'algorithme suivant.

Tant que $b - a > \varepsilon$ faire
  $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$
  Si $f(a)f(m) < 0$ alors
    $b \leftarrow m$
  Sinon
    $a \leftarrow m$
Renvoyer a, b

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2$. On sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\sqrt{2}$ comprise entre 1 et 2.
Exécutons l'algorithme précédent avec $a = 1$, $b = 2$ et $\varepsilon = 0{,}04$.

m		1,5	1,25	1,375	1,4375	1,40625
a	1	1	1,25	1,375	1,375	1,40625
b	2	1,5	1,5	1,5	1,4375	1,4375

Cela montre qu'un encadrement inférieur à $0{,}04$ près de $\sqrt{2}$ est $1{,}40625 < \sqrt{2} < 1{,}4375$.
Par conséquent la moyenne $1{,}42$ est une valeur approchée à $0{,}02$ près.