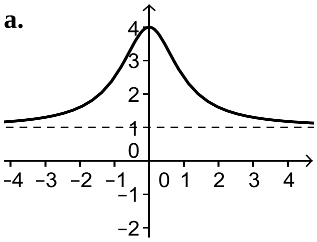
Limites de fonctions et continuité – Exercices

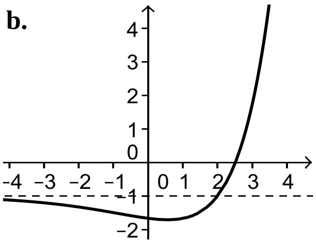
Définition des limites et des asymptotes

1 Indiquer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de chacune des fonctions représentées ci-dessous et préciser les asymptotes.

a.

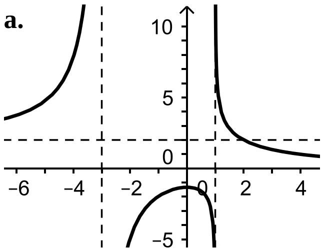


b.

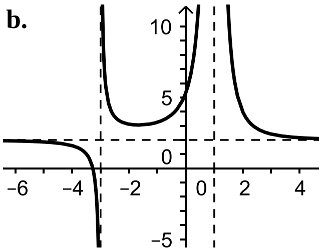


2 Indiquer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions représentées ci-dessous, préciser les asymptotes et construire le tableau de variations.

a.



b.



3 Construire la courbe représentative d'une fonction ayant le tableau de variation suivant. Préciser les asymptotes à la courbe représentative de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

Calculs de limites

4 Dans chaque cas, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, simplifier $f(x)+g(x)$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)+g(x)\big)$.
Que remarque-t-on ?

Cas n°1	Cas n°2	Cas n°3	Cas n°4
$f(x)=x$	$f(x)=x$	$f(x)=2x$	$f(x)=x$
$g(x)=3-x$	$g(x)=-x$	$g(x)=-x$	$g(x)=-2x$

5 Même exercice avec $f(x)\times g(x)$.

Cas n°1	Cas n°2	Cas n°3	Cas n°4
$f(x)=x$	$f(x)=x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=x^2$
$g(x)=\frac{1}{x}$	$g(x)=\frac{1}{x^2}$	$g(x)=\frac{1}{x}$	$g(x)=-\frac{1}{x}$

6 Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f_1(x)=2+x$ **b.** $f_2(x)=5-2x$
c. $f_3(x)=3x^2$ **d.** $f_4(x)=\frac{5x^2}{3}$
e. $f_5(x)=5x^3$ **f.** $f_6(x)=-x^3$
g. $f_7(x)=\frac{5}{x}$ **h.** $f_8(x)=-\frac{3}{4x}$
i. $f_9(x)=\frac{5}{x+3}$ **j.** $f_{10}(x)=2-\frac{1}{5-3x}$

7 Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes définies sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

a. $f(x)=\frac{1}{x}$ **b.** $g(x)=-\frac{2}{x^2}$
c. $h(x)=x-\frac{3}{x}$ **d.** $j(x)=\frac{5-x}{4x}$

8 Déterminer les limites en 2 des fonctions suivantes définies sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par

a. $f(x)=\frac{1}{2-x}$ **b.** $g(x)=-\frac{5}{2-x}$
c. $h(x)=3-\frac{2}{2-x}$ **d.** $j(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$

9 Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x)=3x^2-5x$ **b.** $g(x)=x-x^2$
c. $h(x)=x^3-2x+\frac{1}{x}$ **d.** $j(x)=\frac{x^2-2}{x-1}$
e. $k(x)=\frac{5-x}{x^2+1}$ **f.** $m(x)=\frac{2x^2-3}{x^2-1}$

10 Pour chacune des fonctions suivantes,

1. Déterminer la limite en 1. On devra parfois distinguer la limite par valeurs inférieurs à 1 et par valeurs supérieures.
2. Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Donner les asymptotes à la courbe représentative.

a. $f(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$ **b.** $g(x)=x-4+\frac{3}{2(x-1)}$
c. $h(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$ **d.** $j(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$

11 Pour chacune des fonctions suivantes,

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Donner les asymptotes à la courbe représentative.

a. $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ **b.** $g(x)=\frac{x^2}{x^2+x+1}$
c. $h(x)=\frac{x}{(x+4)^2}$ **d.** $j(x)=\frac{5-x}{x^2-x-6}$

12 Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x-2}{(x+1)^2(x-3)}$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition et donner les asymptotes à la courbe de f.

Théorèmes de comparaison

13 Soit f une fonction vérifiant $x^2\le f(x)$ pour tout $x>8$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

14 Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que $\frac{1}{x}\le f(x)$ pour $x\in]0;1]$. Déterminer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

15 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour $x\in]0;1]$ on a $\frac{1}{x+1}\le f(x)\le\frac{1}{x^2+1}$. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

Limites d'une fonction composée

16 Sans se soucier des problèmes d'ensembles de définition, donner les expressions des fonctions $f\circ g$, $f\circ f$ et $g\circ f\circ g$ où f et g sont définies par

$$f(x)=\frac{2}{x+1} \text{ et } g(x)=5x+1.$$

17 Déterminer les limites en $-\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x)=(x^4+2)^3$ **b.** $g(x)=\sqrt{\frac{5}{x^4+2}}$
c. $h(x)=\frac{(x^4+2)^3+2(x^4+2)+1}{x^4+2}$

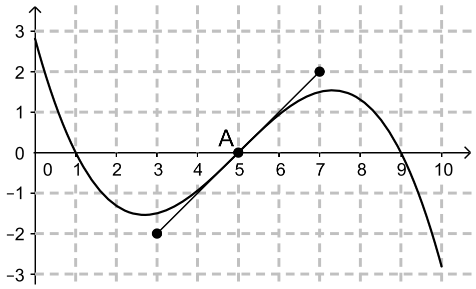
18 Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x) = \sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+7}}$ **b.** $g(x) = \left(\frac{3x^2+1}{x^2+7}\right)^3$

19 On considère la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{7}{x-2}}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

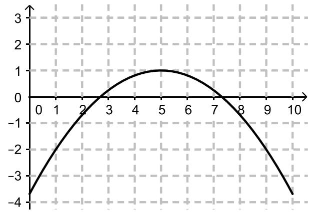
Étude de fonctions

20 On donne ci-dessous la représentation graphique C d'une fonction f définie sur $[0; 10]$.

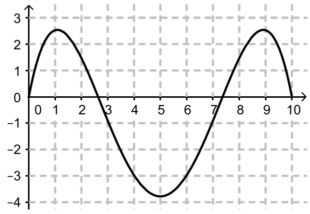


La tangente à la courbe C au point A d'abscisse 5 est tracée. Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminer laquelle représente graphiquement la fonction dérivée f'.

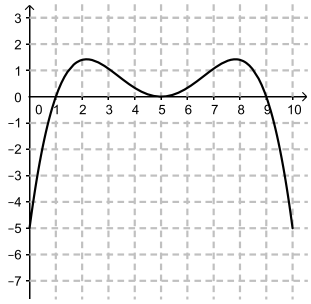
a. Courbe 1



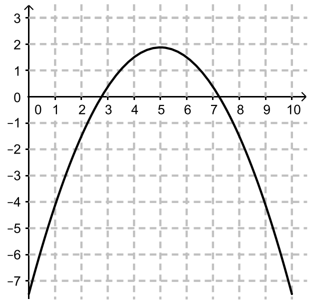
b. Courbe 2



c. Courbe 3



d. Courbe 4



21 Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ par $f(x) = \frac{-2x+1}{x-3}$ et C_f sa courbe.

1. Étudier les variations de f.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

3. Donner l'équation de l'asymptote horizontale (d) et de l'asymptote verticale (d').

4. Étudier la position relative de C_f et (d).

Limites de la fonction exponentielle

22 Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x) = -2e^x$ **b.** $f(x) = 1 - e^x$

c. $f(x) = e^x + x$ **d.** $f(x) = e^x + 2x - 1$

23 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x}e^x$.

1. Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?

2. Calculer les limites aux bornes de D_f.

3. Étudier les variations de f.

24 Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x) = e^x - x$ **b.** $f(x) = (x+1)e^x$

c. $f(x) = 4x^3e^{-x}$ **d.** $f(x) = x - x^2e^{-x}$

e. $f(x) = \frac{e^x-4}{e^x+2}$ **f.** $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

25 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (x-2)e^x + 1.$$

1. Démontrer que $f''(x) = xe^x$.

2. En déduire les variations de f', le signe de f' et enfin les variations de f.

Continuité, théorème des valeurs intermédiaires

26 Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 \text{ si } x < -1 \\ x^3 - 2 \text{ si } -1 \le x \le 1 \\ -1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$
et montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

27 On considère une fonction f définie et continue sur $[-5; 8]$ dont le tableau de variation est le suivant.

x	-5	3	8
Variations de f	30 ↘	-1 ↗	5

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 7$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

28 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3$ sur $[0; 10]$.

1. Étudier les variations de f.

2. Démontrer que l'équation $x^3 = 30$ admet une unique solution sur $[0; 10]$ et en donner une valeur approchée à 0,01 près.

29 Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et trouver à l'aide de la calculatrice un encadrement à 10^{-2} puis une valeur approchée à 10^{-2} de α.

a. $f(x) = x^3 + 5x - 7$ **b.** $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$

30 Montrer que l'équation $x^4 - x^3 = 2$ admet deux solutions réelles et en déterminer un encadrement à 0,01 près.

31 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^3 - x + 1.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Construire le tableau de variation de f.

3. Montrer que $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{9-2\sqrt{3}}{9}$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée à 0,01 près.

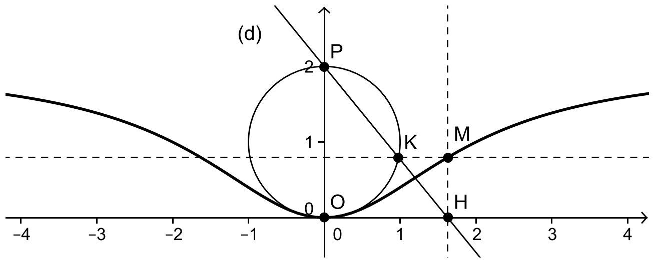
32 Soit a un réel et n un entier naturel impair. Montrer que l'équation $x^n = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Que se passe-t-il si n est pair ?

Problèmes

33 f est la fonction définie sur $D_f =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{ax+b}{x-3}$ où a et b sont réels.
On sait que la droite d'équation $y = 4$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$. De plus $f'(1) = \frac{1}{2}$.

1. Trouver les valeurs de a et b.
2. Étudier les limites aux bornes de D_f.
3. Dresser le tableau de variations de f.

34 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, on considère $P(0; 2)$ et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[OP]$. Soit une droite (d) passant par P. On appelle K, lorsqu'il existe, le second point d'intersection de (d) avec $\mathcal{C}$ et H l'intersection de (d) avec l'axe des abscisses.
La parallèle à $(O; \vec{\imath})$ passant par K coupe la parallèle à $(O; \vec{\jmath})$ passant par H en M.
On s'intéresse au lieu $\mathcal{E}$ des points M lorsque (d) pivote autour de P.



1. Déterminer le point M si $(d) = (OP)$.
2. On suppose à présent $(d) \neq (OP)$ et soit m le coefficient directeur de (d).
   a. Démontrer que (d) a pour équation $y = mx + 2$ et $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 + (y-1)^2 = 1$.
   b. En déduire que (d) recoupe le cercle si et seulement si $m \neq 0$ et qu'alors $M\left(-\frac{2}{m}; \frac{2}{m^2+1}\right)$.
3. Démontrer grâce aux questions 1 et 2 :
$$M(x; y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow y = \frac{2x^2}{x^2+4}.$$
4. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2}{x^2+4}$ ainsi que ses limites. Tracer la courbe et préciser ses asymptotes.

35 *(2014, Polynésie).* Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$.
On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes C_f et C_g ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
2. **Étude de la position relative de C_g et Δ**

   Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.
   a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.
   b. Justifier que, pour tout réel x,
$$h(x) = x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right).$$
   En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.
   c. Calculer $h'(x)$ et étudier son signe.
   d. Dresser le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$.
   e. En déduire que, pour tout réel x, $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$.
   f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ ?
3. **Étude de la position relative des courbes C_f et C_g**
   a. Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.
   b. Déterminer la position relative de C_f et C_g.

36 On considère les courbes C_1 et C_2 d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe une unique tangente commune à ces deux courbes.

1. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point de C_1 d'abscisse a et par B le point de C_2 d'abscisse b.
   a. Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe C_1 au point A, puis de la tangente T_B à la courbe C_2 au point B.
   b. En déduire que ces droites sont confondues si et seulement si
$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}.$$
   c. Montrer que ce système équivaut à
$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}.$$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4.$$
   On va montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.
   a. Montrer que pour $x < 0$, on a $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$. En déduire que l'équation n'a pas de solution sur $]-\infty; 0[$.
   b. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[0; +\infty[$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.
3. On prend pour A le point d'abscisse a. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites T_A et T_B sont confondues.

37 *(2013, Nouvelle-Calédonie).* Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire
   a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^2e^x - 1$.
   Étudier le sens de variation de la fonction g.
   b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   Donner en encadrement à 10^{-3} de a.
   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.
2. Étude de la fonction f
   a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b. Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
   c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
   d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$.
   e. Justifier soigneusement que $3{,}43 < m < 3{,}45$.