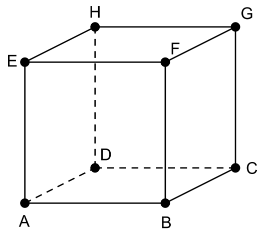
Géométrie dans l'espace

1. Position relative de droites et de plans

❖ **Position relative de deux droites**

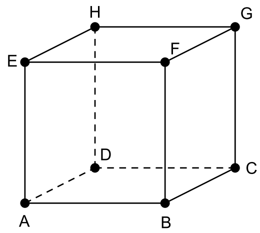
Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.

Droites non coplanaires. Il n'existe pas de plan contenant les deux droites.

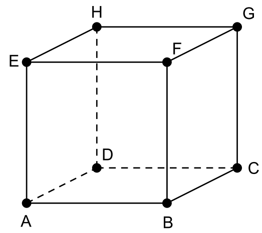


Les droites (AD) et (EF) ne sont pas coplanaires.

Droites coplanaires. Il existe un plan contenant les deux droites, elles sont donc parallèles ou sécantes.



Les droites (AB) et (BH) sont sécantes en B.

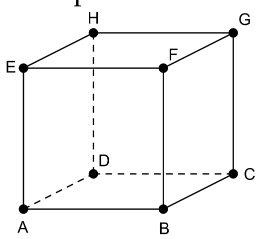


Les droites (AD) et (FG) sont parallèles.

❖ **Position relative de deux plans**

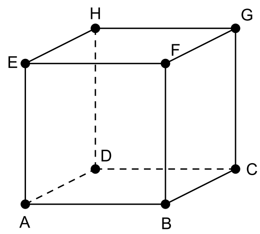
Deux plans de l'espace sont soit parallèles, soit sécants.

Plans parallèles. Ils sont confondus ou n'ont aucun point commun.



Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.

Plans sécants. Ce sont deux plans non parallèles. Leur intersection est une droite.

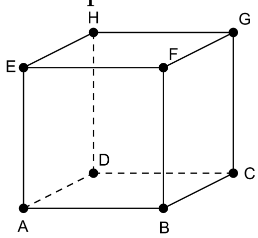


Les plans (ABC) et (BCF) sont sécants. Leur droite d'intersection est (BF).

❖ **Position relative d'une droite et d'un plan**

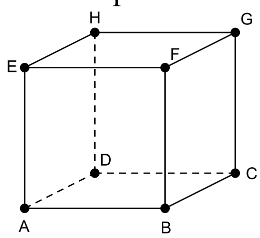
Une droite et un plan sont soit sécants, soit parallèles.

Droite et plan sécants. Ils ont un seul point commun.

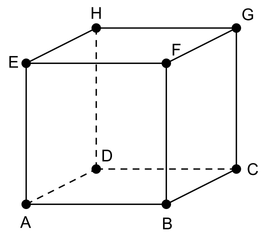


La droite (FH) et le plan (ABF) sont sécants en F.

Droite et plan parallèles. La droite est contenue dans le plan ou n'a aucun point commun avec lui.



La droite (FH) est contenue dans le plan (EFG).

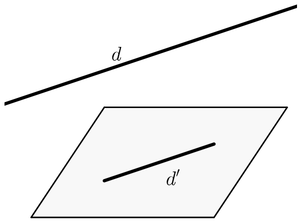


La droite (EG) est parallèle au plan (ABC).

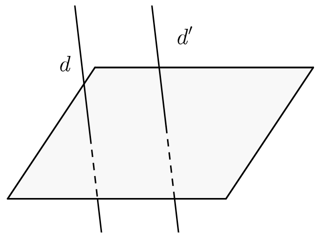
2. Parallélisme de droites et plans

❖ **Droites ou plans parallèles**

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite du plan.



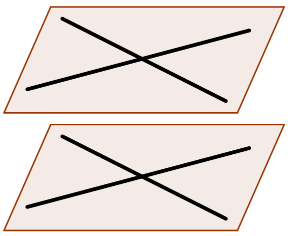
Si deux droites sont parallèles, tout plan sécant à l'une est sécant à l'autre.



Propriété. Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

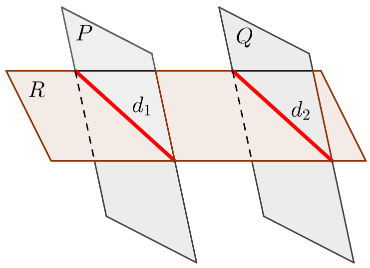
❖ **Plans parallèles**

Si un plan P contient deux droites sécantes parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors P et Q sont parallèles.



Si deux plans sont parallèles à un même plan, alors ils sont parallèles entre eux.

Soit P et Q deux plans parallèles. Si R est un plan sécant avec P, alors Q et R sont sécants et les droites d'intersection de R avec P et Q sont parallèles.



3. Vecteurs de l'espace

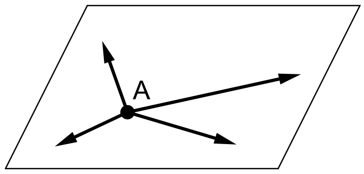
Les définitions et propriétés sur les vecteurs du plan peuvent être étendus à l'espace.

Définition. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits* <u>*colinéaires*</u> *si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.*

Théorème. Soit A, B, C et D quatre points de l'espace.
Les points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires (en supposant $A \neq B$ et $C \neq D$).

Définition. *Étant donné n vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, …, $\overrightarrow{u_n}$ et n réels x_1, x_2, … x_n, tout vecteur de la forme $x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{u_n}$ est appelé* <u>*combinaison linéaire*</u> *des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, …, $\overrightarrow{u_n}$.*

Définition. *Des vecteurs sont dits <u>coplanaires</u> si leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.*



Cela équivaut à dire qu'il existe des représentants de ces vecteurs ayant leurs origines et leurs extrémités coplanaires.

En pratique, nous rencontrons essentiellement le cas suivant.

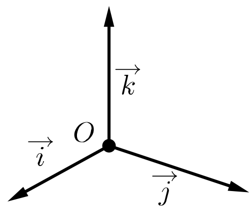
Théorème (critère de coplanarité pour 3 vecteurs). Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs.
- Si deux d'entre eux sont colinéaires, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires (car ils ne donnent en fait qu'au plus deux directions).
- Sinon, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

<u>Exemple</u>

Dans le cube, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires car $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.

L'intérêt des triplets de vecteurs non coplanaires réside dans le théorème suivant.

Théorème (décomposition dans une base de l'espace). Soit $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ des vecteurs non coplanaires de l'espace (on dit que ces vecteurs forment une <u>base</u> de l'espace).
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet de réels $(a; b; c)$ tel que
$$\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}.$$
Ces réels s'appellent <u>coordonnées</u> de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}; \vec{k})$.



Les formules du plan s'étendent à l'espace.

Théorème. Dans une base de l'espace, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et k un réel.

On a $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.

<u>Exemple</u>

Dans une base de l'espace, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires puisque $\vec{v} = -2\vec{u}$. En revanche $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car les coordonnées ne sont pas proportionnelles ; pour le justifier correctement, on peut écrire simplement que $4 \times 1 \neq -1 \times 8$.

<u>Exemple</u>

Dans une base $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}; \vec{k})$ de l'espace, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{t}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base et décomposer $\vec{s}$ dans cette base. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$ n'est pas une base.

Réponse. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires puisque $-1 \times (-1) \neq 0 \times 2$, donc la coplanarité des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ équivaut à l'existence de deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Comme $x\vec{u} + y\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x+2y \\ -y \\ 3x+y \end{pmatrix}$, cela donne le système suivant.

$$\begin{cases} 1 = -x + 2y \\ 7 = -y \\ 3 = 3x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -15 \\ y = -7 \\ 3 = 3 \times (-15) - 7 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution, donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base.

Exprimons $\vec{s}\begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. On a

$$\vec{s} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + c = -9 \\ -b + 7c = -4 \\ 3a + b + 3c = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 7b + 6c = -27 \\ -b + 7c = -4 \\ 3a + b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 7L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 55c = -55 \\ b = 4 + 7c \\ 3a + b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

Ainsi $\vec{s} = 2\vec{u} - 3\vec{v} - \vec{w}$.

Quant à la seconde question, on doit résoudre :

$$\begin{cases} -4 = -x + 2y \\ 1 = -y \\ 5 = 3x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ 5 = 3 \times 2 - 1 \end{cases}$$

On a donc $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, ce qui montre que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas une base.

4. Droites et plans de l'espace

❖ Droites de l'espace

Une droite de l'espace est définie par la donnée :

- soit de deux points distincts ;
- soit d'un point A et d'un vecteur non nul $\vec{u}$, appelé vecteur directeur de la droite.

Dans le second cas, on retiendra le résultat suivant.

Caractérisation d'une droite. Soit d la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.
Le point M appartient à d si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Si la droite est définie par deux points distincts A et B, un vecteur directeur de cette droite est $\overrightarrow{AB}$.

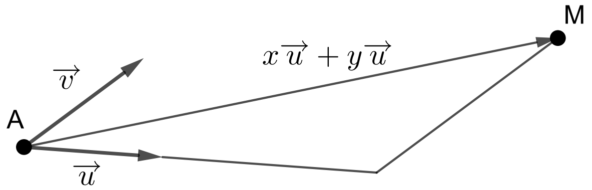
❖ Plans de l'espace

Un plan de l'espace est défini par la donnée :

- soit de trois points non alignés ;
- soit d'un point et de deux vecteurs non colinéaires, appelés vecteurs directeurs du plan.

Dans le second cas, on retiendra le résultat suivant.

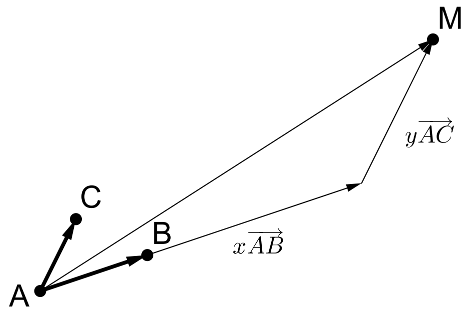
Caractérisation d'un plan. Soit P le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Le point M appartient à P si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.



On dit qu'on a décomposé $\overrightarrow{AM}$ selon $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ou encore qu'on a exprimé $\overrightarrow{AM}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Les réels x et y sont les coordonnées du point M dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$ du plan (ABC).

Si le plan est défini par trois points non alignés A, B, C, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en sont des vecteurs directeurs, si bien que l'on obtient le cas particulier suivant.

Théorème. Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace. Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que
$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$



5. Repérage dans l'espace

Un repère de l'espace est un quadruplet $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ où O est un point et $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. En définissant les points I, J, K par $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$, ce repère est dit orthonormé lorsque les droites (OI), (OJ), (OK) sont perpendiculaires deux à deux et que $OI = OJ = OK$.
Soit M un point de l'espace. Les coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$. On dit que x est l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote.

Les formules du plan s'étendent à l'espace. Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors
- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$;
- le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$;
- si le repère est orthonormé, on a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Exemple

On se place dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace et on considère les points $A(-1; 0; 2)$, $B(3; -1; 0)$ et $C(0; -2; -1)$.
1. Montrer que ces points définissent un plan.
2. Le point $D(-1; 1; 3)$ appartient-il au plan (ABC) ?
3. Démontrer qu'un point $M(a; b; c)$ appartient à (ABC) si et seulement si
$$a - 10b + 7c - 13 = 0.$$

Réponse.

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$. Puisque $4\times(-2)\neq -1\times 1$, ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les points A, B, C ne sont pas alignés, ils définissent donc un plan.

2. Le point D appartient au plan si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$. Comme $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, cela revient à résoudre le système suivant.

$$\begin{cases}0=4x+y\\1=-x-2y\\1=-2x-3y\end{cases}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_1+4L_2\\L_3\leftarrow L_1+2L_3}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}0=4x+y\\4=-7y\\2=-5y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=4x+y\\y=-\frac{4}{7}\\y=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, donc D n'appartient pas au plan (ABC).

3. Puisque $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}a+1\\b\\c-2\end{pmatrix}$, l'appartenance de M à (ABC) se traduit par l'existence de deux réels x et y tels que

$$\begin{cases}a+1=4x+y\\b=-x-2y\\c-2=-2x-3y\end{cases}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_1+4L_2\\L_3\leftarrow L_1+2L_3}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}a+1=4x+y\\a+1+4b=-7y\\a+1+2(c-2)=-5y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{a+1-y}{4}\\y=-\frac{a+1+4b}{7}\\y=-\frac{a+2c-3}{5}\end{cases}$$

- Si $-\frac{a+1+4b}{7}\neq-\frac{a+2c-3}{5}$, le système n'a pas de solution car on a deux valeurs de y (comme à la question 2).
- Si $-\frac{a+1+4b}{7}=-\frac{a+2c-3}{5}$, le système admet une solution.

Comme

$$\frac{a+1+4b}{7}=\frac{a+2c-3}{5}\Leftrightarrow 5(a+1+4b)=7(a+2c-3)\Leftrightarrow a-10b+7c-13=0,$$

on a prouvé que le point $M(a;b;c)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si

$$a-10b+7c-13=0.$$

On vérifie d'ailleurs que les coordonnées des points A, B, C vérifient cette égalité. L'équation $x-10y+7z-13=0$ s'appelle équation cartésienne du plan (ABC). Cette notion sera étudiée dans le chapitre sur le produit scalaire.

6. Représentations paramétriques

On se place dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace.

Théorème. Soit D la droite passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.
Un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient à D si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases}x=x_A+ta\\y=y_A+tb\\z=z_A+tc\end{cases}$$

Démonstration. C'est la traduction de $M\in D\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R},\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$. ■

Définition. *Ce système s'appelle une <u>équation paramétrique</u> ou <u>représentation paramétrique</u> de la droite.*

Exemple

Soit $A(1;2;3)$ et $B(2;3;5)$. Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, donc une équation paramétrique de (AB) est $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+2t\end{cases}$. Pour $t=0$, on obtient le point A et pour $t=1$ le point B.

Mais $-2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur, donc $\begin{cases}x=2-2t\\y=3-2t\\z=5-4t\end{cases}$ est également une équation paramétrique de (AB). Pour $t=\frac{1}{2}$ on obtient le point A et pour $t=0$ on obtient le point B.

Théorème. Soit P le plan passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$
Un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient à P si et seulement s'il existe deux réels t et t' tels que

$$\begin{cases}x=x_A+ta+t'a'\\y=y_A+tb+t'b'\\z=z_A+tc+t'c'\end{cases}$$

Exemple

Soit $A(1;2;3)$, $B(2;3;5)$, $C(1;1;0)$, $D(-1;3;0)$ et $E(2;1;-1)$.
Déterminer la position de relative de la droite (AB) et du plan (CDE).

Réponse. La droite (AB) a pour équation paramétrique $\begin{cases}x=1+s\\y=2+s\\z=3+2s\end{cases}$, où $s\in\mathbb{R}$ d'après l'exemple précédent.

Le plan (CDE) est dirigé par $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et passe par C, donc une équation paramétrique du plan est $\begin{cases}x=1-2t+t'\\y=1+2t\\z=-t'\end{cases}$, où $(t,t')\in\mathbb{R}^2$.

On est donc amené à résoudre le système $\begin{cases}1+s=1-2t+t'\\2+s=1+2t\\3+2s=-t'\end{cases}$.

On élimine par exemple t en effectuant $L_1\leftarrow L_1+L_2$:

$$\begin{cases}3+2s=1-2t+t'+(1+2t)\\2+s=1+2t\\3+2s=-t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3+2s=2+t'\\3+2s=-t'\\2+s=1+2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-t'=2+t'\\3+2s=-t'\\2+s=1+2t\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}t'=-1\\3+2s=1\\2+s=1+2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=-1\\s=-1\\2-1=1+2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=-1\\s=-1.\\t=0\end{cases}$$

En faisant $s=-1$ dans l'équation paramétrique de (AB), ou en faisant $(t,t')=(0,-1)$ dans l'équation paramétrique de (CDE), on en déduit que (AB) et (CDE) sont sécants en le point Q de coordonnées $(0;1;1)$.