Géométrie dans l'espace – Exercices

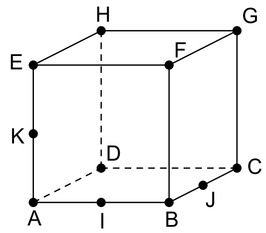
Positions relatives de droites et plans

1 $ABCDEFGH$ est un cube.
Un plan P coupe le plan (EFG) selon une droite Δ et le plan (ABC) selon une droite Δ'.
Que peut-on dire de Δ et Δ' ?

2 Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires.

1. Justifier que A, B, C ne sont pas alignés.
2. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (BCD).

3 $ABCDEFGH$ est un cube et I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$ et $[AE]$.



1. Citer sans justifier :
- **a.** deux droites sécantes ;
- **b.** deux droites parallèles ;
- **c.** deux droites non coplanaires.

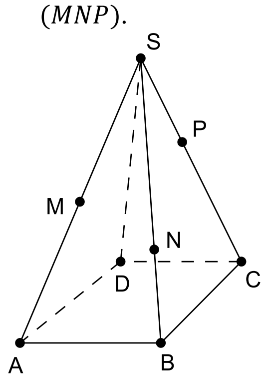
2. Préciser, en justifiant, la position relative :
- **a.** des droites (FC) et (AF) ;
- **b.** des droites (CI) et (AE) ;
- **c.** des droites (EB) et (HC).

3. Préciser, en justifiant, la position relative :
- **a.** de la droite (IJ) et du plan (HGF) ;
- **b.** de la droite (CD) et du plan (HEA) ;
- **c.** de la droite (HK) et du plan (ABE) ;
- **d.** de la droite (AB) et du plan (HIJ).

4. Préciser, en justifiant, la position relative :
- **a.** des plans (DKH) et (FBJ) ;
- **b.** des plans (AEF) et (AEG) ;
- **c.** des plans (BDC) et (EAH) ;
- **d.** des plans (ADG) et (EBC) ;
- **e.** des plans (DIF) et (DBH).

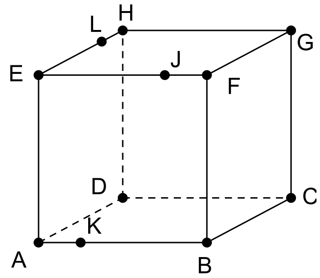
4 On considère la pyramide $SABCD$ ci-dessous. Compléter la figure au fur et à mesure.

1. Déterminer le point d'intersection U de la droite (NP) et du plan (ABC).
2. Déterminer le point d'intersection V de la droite (MN) et du plan (ABC).
3. En déduire l'intersection des plans (MNP) et (ABC).
4. Déterminer le point d'intersection W de la droite (DC) et du plan (MNP).
5. En déduire l'intersection du plan (MNP) et de la face (SDC).
6. Déterminer la section de la pyramide $SABCD$ par le plan (MNP).

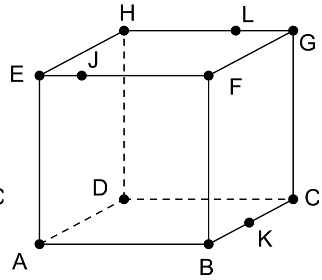


5 Construire les sections des cubes et tétraèdres suivants. Pour les trois cubes, le plan de section est (JKL).

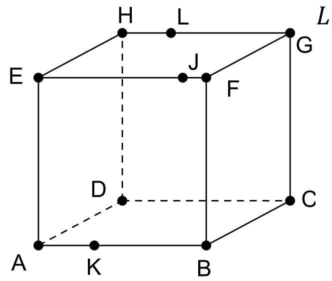
a.



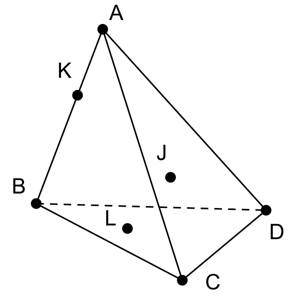
b.



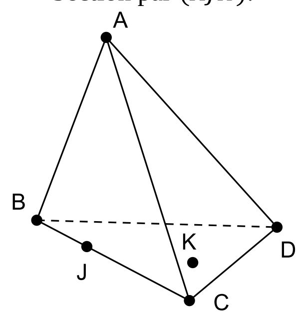
c.



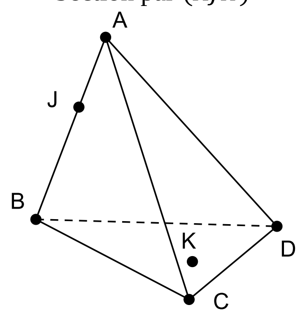
d. $K \in [AB]$, $J \in (ABD)$ et $L \in (BCD)$.
Section par (JKL)



e. $J \in [BC]$ et $K \in (BCD)$.
Section par (AJK).

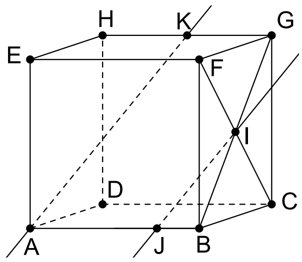


f. $J \in [AB]$ et $K \in (BCD)$.
Section par (AJK)



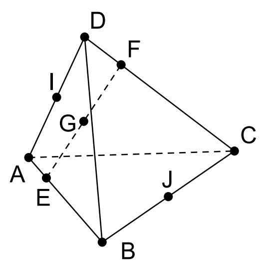
Vecteurs de l'espace

6 $ABCDEFGH$ est le cube représenté ci-contre. I est le centre de la face $BCGF$, K est le milieu de $[HG]$ et J le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.



1. À l'aide de la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{JI}$.
2. Que peut-on en déduire pour les deux droites (AK) et (IJ) ?

7 $ABCD$ est un tétraèdre et λ un réel. Soit I et J les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$. On définit E et F par
$$\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DF} = \lambda\overrightarrow{DC}.$$
Soit G le milieu de $[EF]$.



1. a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GE}$ en fonction des vecteurs

$\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$.

b. Exprimer de même le vecteur $\overrightarrow{GF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{GC}$.

2. a. Démontrer que $(1-\lambda)\overrightarrow{GI}+\lambda\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$.

b. En déduire que I, J et G sont alignés.

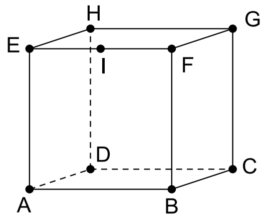
8 $ABCD$ est un tétraèdre, G est le centre de gravité de la face ACD et M est le point tel que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

a. Démontrer que la droite (MG) est la parallèle à la droite (BI) où I est le milieu de $[CD]$.

b. En déduire que la droite (MG) est parallèle au plan (BCD).

Vecteurs coplanaires et base de l'espace

9 $ABCDEFGH$ est le cube ci-contre, I est le milieu de l'arête $[EF]$. Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont coplanaires ou non et justifier.



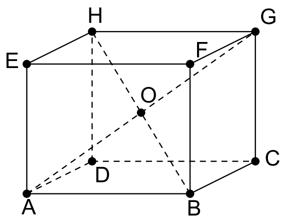
a. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DG}$;

b. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{EI}$;

c. $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{IA}$;

d. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{CI}$;

10 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle de centre O.



a. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont-ils coplanaires ?

11 On considère les vecteurs $\vec{u}(0;-1;1)$, $\vec{v}(-2;-1;3)$, $\vec{w}(-1;-1;-1)$ et $\vec{t}(-2;1;1)$.

Les triplets $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et $(\vec{u},\vec{v},\vec{t})$ sont-ils des bases de l'espace ?

12 Soit $\vec{u}(-2;3;1)$, $\vec{v}(1;0;3)$ et $\vec{w}(1;2;-1)$.

1. Montrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace.

2. Exprimer $\vec{t}(1;7;2)$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

3. Exprimer $\vec{s}(-1;0;0)$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Repérage dans l'espace

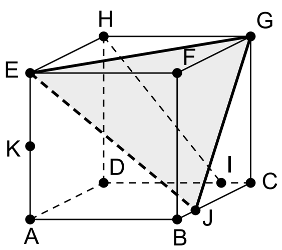
13 Montrer que les points de coordonnées $A(-2;-1;6)$, $B(1;3;5)$ et $C(13;19;1)$ sont alignés.

14 On considère les points $A(-1;-4;5)$, $B(2;0;3)$, $C(-8;-11;-8)$ et $D(-4;-15;12)$.

1. Donner les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

2. Les points A, B, M sont-ils alignés ?

15 $ABCDEFGH$ est le cube ci-contre. On considère les points I et J définis par $\overrightarrow{DI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.



On munit l'espace du repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des points E, G, H, I et J.

2. a. Démontrer qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{HI}=x\overrightarrow{EG}+y\overrightarrow{EJ}$.

b. En déduire que (HI) est parallèle à (EGJ).

16 Montrer que les points $A(1;2;3)$, $B(3;2;6)$, $C(1;4;2)$ et $D(-1;4;-1)$ sont coplanaires.

17 Montrer que les points $A(-4;5;-1)$, $B(-1;5;-4)$, $C(-2;12;4)$ et $D(4;12;-2)$ sont coplanaires.

18 Soit $A(1;2;4)$, $B(3;1;3)$ et $C(2;6;5)$.

1. Démontrer que A, B, C ne sont pas alignés.

2. Démontrer que le point $D(a;b;c)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si $a-b+3c=11$.

19 Soit les points $A(3;2;1)$, $B(10;6;-1)$, $C(9;8-9)$ et $D(2;4;-7)$ dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que ces points sont coplanaires.

2. Montrer que $ABCD$ est un losange.

20 $ABCDEFGH$ est un cube, I est le centre de gravité du triangle BEG. En se plaçant dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ montrer que les points D, I, F sont alignés.

Représentations paramétriques

21 Soit (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2-t \\ z=4-2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

1. Donner trois points de (d).

2. Justifier que $N(-7;1;10)\in(d)$

3. Donner un vecteur directeur de (d).

22 Soit (d) la droite passant par $A(2;7;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;2;-2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de (d).

2. Déterminer le point d'ordonnée 3 de la droite (d).

23 Donner une représentation paramétrique de (AB) dans chacun des cas suivants.

a. $A(2;-1;3)$ et $B(0;2;4)$.

b. $A(1;2;3)$ et $B(-1;-2;2)$.

24 Soit (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=4+3t \\ y=-2+t,\ t\in\mathbb{R}. \\ z=1-5t \end{cases}$$

1. Le point $A(-2;-4;13)$ appartient-il à (d) ?

2. Soit les points $B(1;4;2)$ et $C(-11;0;22)$. La droite (BC) est-elle parallèle à (d) ?

3. Donner une représentation paramétrique de (BC)

25 Soit (d) et (d') les droites de représentations paramétriques $\begin{cases} x=1+4t \\ y=2+4t,\ t\in\mathbb{R} \\ z=1-6t \end{cases}$ et $\begin{cases} x=15+k \\ y=8-k \\ z=-6+2k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$.

Démontrer que ces droites sont sécantes en un point dont on donnera les coordonnées.

26 Soit (d) et (d') les droites de représentations paramétriques $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-1+t,\ t\in\mathbb{R} \\ z=2-t \end{cases}$ et $\begin{cases} x=2k \\ y=3+k \\ z=-2+3k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$.

Démontrer que ces droites ne sont pas coplanaires.

28 Soit $A(-1;3;2)$ et $B(2;1;-2)$.
Déterminer l'intersection de (AB) avec le plan passant par O et dirigé par $\vec{\imath}(1;0;0)$ et $\vec{\jmath}(0;1;0)$.

29 La droite (d) passe par le point $A(0;2;3)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}(1;1;1)$. La droite (d') passe par les points $B(2;0;-1)$ et $C(4;-2;2)$.
Étudier la position relative de ces droites.

30 Soit les points $A(4;-4;3)$, $B(2;-1;4)$, $C(-3;5;5)$, $D(-2;2;5)$, $E(-4;5;6)$ et $F(3;2;4)$.
Déterminer une équation paramétrique à coefficient entiers de l'intersection des plans (ABC) et (DEF).

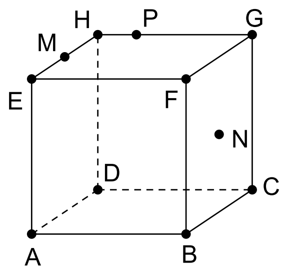
31 On considère les droites d_1, d_2 et d_3 de représentations paramétriques respectives

$$\begin{cases} x = -s \\ y = 3 + s \\ z = 1 + 2s \end{cases}, \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -3t \\ z = -3 - 4t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = -2 + 4u \\ y = 1 + 4u \\ z = 1 \end{cases}$$

Démontrer que ces droites sont concourantes en un point que l'on déterminera.
Ces droites sont-elles coplanaires ?

32 *(2014, Amérique du Nord)*[1]. On considère un cube $ABCDEFGH$ donné ci-dessous.

On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.



Partie A – Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L. Construire le point L.
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

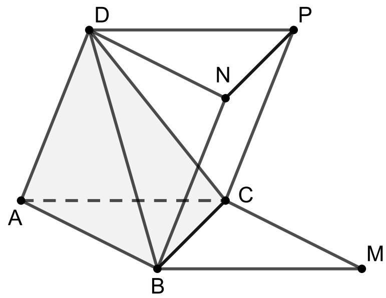
L'espace est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.
3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1;1;\frac{5}{8}\right)$.
   Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

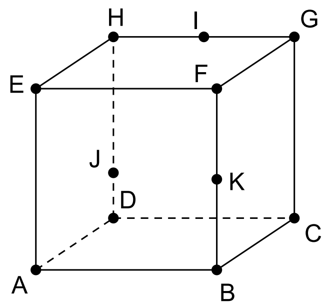
33 $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points équidistants de A, H et G.

1. Pour un point M de coordonnées $(x;y;z)$, calculer AM^2, GM^2 et HM^2.
2. Démontrer que $M(x;y;z)$ est équidistant de A, H, G équivaut à $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y + z = \frac{3}{2} \end{cases}$.
3. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que cette droite passe par les milieux des segments $[EF]$ et $[CD]$.

34 On considère un tétraèdre $ABCD$ et les points M, N et P tels que les quadrilatères $ABMC$, $ABND$ et $ACPD$ soit des parallélogrammes.
En se plaçant dans un repère adapté, montrer que les droites (DM), (CN) et (BP) sont concourantes.



35 On considère un cube $ABCDEFGH$ et les points I, milieu de $[GH]$, J tel que $\overrightarrow{HJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HD}$ et K milieu de $[BF]$.



Partie A –

1. Justifier que les droites (IJ) et (GC) sont sécantes en un point L puis construire ce point.
2. Construire l'intersection des plans (IJK) et (BCG).
3. Construire la section du cube par le plan (IJK).

Partie B – L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points I, J, K.
2. Déterminer une équation paramétrique de la droite (AG).
3. Déterminer une équation paramétrique du plan (IJK).
4. En déduire que (AG) et (IJK) sont sécants en un point P dont on donnera les coordonnées.
5. Déterminer l'intersection des plans (ABG) et (IJK).

---
[1] C'est une bonne idée de démontrer les résultats admis.