Dérivation et convexité

Dérivation

1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leur ensemble de définition et de dérivabilité.

a. $f_1(x) = \sqrt{x+1}$ **b.** $f_2(x) = \sqrt{-x+3}$

c. $f_3(x) = \sqrt{5x-2}$ **d.** $f_4(x) = \sqrt{x^2+1}$

e. $f_5(x) = \sqrt{1-x^2}$ **f.** $f_6(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+3}}$

2 Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leur ensemble de définition et de dérivabilité.

a. $f_1(x) = (2x+3)^5$ **b.** $f_2(x) = (5-x^2)^3$

c. $f_3(x) = \left(\frac{x+1}{2-x}\right)^2$ **d.** $f_4(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$

e. $f_5(x) = \frac{4}{(x^2+1)^3}$ **f.** $f_6(x) = \frac{(x^3+1)^3}{\sqrt{x}}$

3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}.$$

1. Démontrer que $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$.
2. En dérivant cette égalité, en déduire que

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0.$$

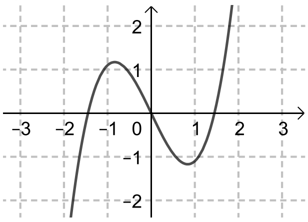
4 Soit la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{5-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{-x^2+10x+1}{2\sqrt{(x^2+1)(5-x)^3}}$ puis construire le tableau de variation de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

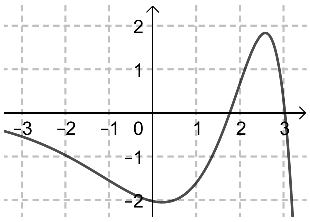
Convexité

5 Pour chacune des fonctions, indiquer les intervalles sur lesquels elle est concave et ceux où elle est convexe ainsi que les éventuels points d'inflexion. On a représenté en pointillé les tangentes aux points d'inflexion.

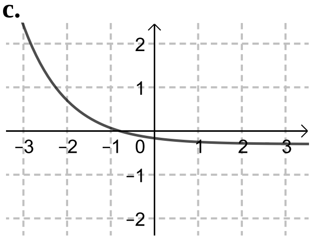
a.



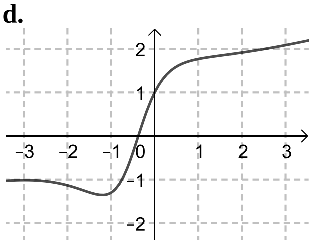
b.



c.



d.



6 Pour chacune des fonctions suivantes, à l'aide de la calculatrice, indiquer les intervalles où la fonction proposée est concave ou convexe et donner les éventuels points d'inflexion.

a. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1.$ **b.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$

c. $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2$ **d.** $f(x) = \frac{8(x+1)}{4x^2+8x+7}$

7 Montrer que la fonction f définie sur $[-2;1]$ par $f(x) = x^3 + x^2$ n'est pas convexe sur cet intervalle.

8 Montrer que la valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.

Convexité et dérivation

9 f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et sa courbe représentative possède au point d'abscisse 0 une tangente T d'équation $y = x+1$.

1. Construire T et une courbe vérifiant les hypothèses.
2. Montrer que $f(1) \geq 2$.

10 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$.

1. Donner l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 10.
2. En déduire sans calculatrice que $10{,}1^2 \geq 102$.

11 Pour chacune des fonctions f suivante, déterminer l'ensemble de définition, calculer $f''(x)$ et en déduire les intervalles où f est convexe ou concave et les points d'inflexion éventuels.

a. $f(x) = 4x^2 - 16x + 15$ **b.** $f(x) = -x^3 + 4x$

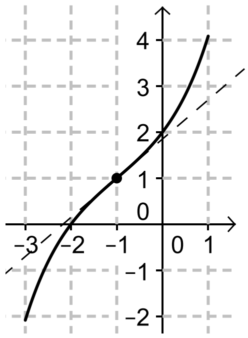
c. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$ **d.** $f(x) = \frac{1}{x}$

e. $f(x) = \frac{10x}{x^2+3}$ **f.** $f(x) = x^3(x-2)$

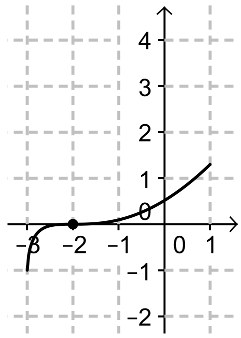
g. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ **h.** $f(x) = x$

12 Soit f la fonction définie sur $[-3;1]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.
Construire les tableaux de signe de f, f' et f''.

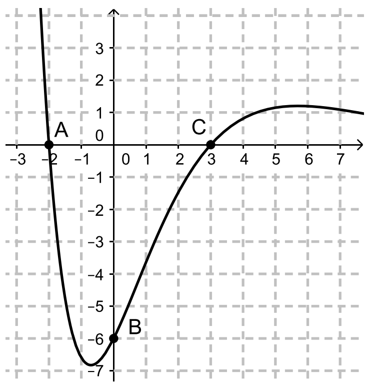
a.



b.



13 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dans un repère orthonormé.
Les points suivants appartiennent à la courbe : $A(-2;0)$; $B(0;-6)$ et $C(3;0)$.

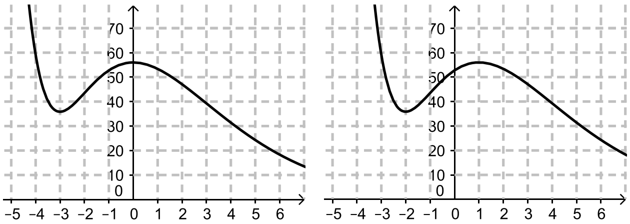


Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur $[-2;3]$, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?

3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

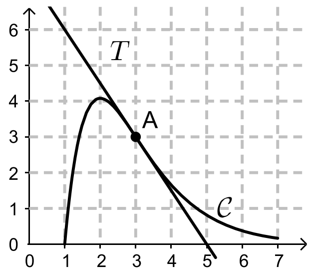
Courbe 1 Courbe 2



14 Pour chacune des questions, donner l'unique bonne réponse.

La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[1; 7]$.

La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(3; 3)$ et passe par le point de coordonnées $(5; 0)$.



Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

1. On a
   - **a.** $f'(3) = 3$
   - **b.** $f'(3) = \frac{3}{2}$
   - **c.** $f'(3) = -\frac{2}{3}$
   - **d.** $f'(3) = -\frac{3}{2}$
2. On a
   - **a.** $f''(3) = 3$
   - **b.** $f''(3) = 0$
   - **c.** $f''(5) = 0$
   - **d.** $f''(2) = 0$

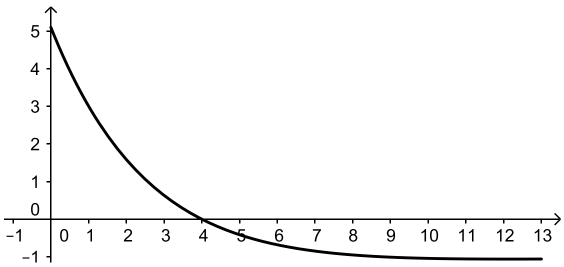
15 Vrai ou faux ? Justifier.

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 1]$.

x	-3	-1	0	1
variations de f	-6 ↗	-1 ↘	-2 ↗	4

Proposition 1 : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3; 1]$.

2. On considère une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 13]$ et on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction g' sur l'intervalle $[0; 13]$.



Proposition 2 : La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 4]$.

Proposition 3 : La fonction g est concave sur $[0; 13]$.

16 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 1 + xe^{-x}.$$

Soit C_f sa courbe représentative.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f''(x) = (x-2)e^{-x}$.
   b. Étudier le signe de f'', en déduire les variations de f' puis que pour tout x, $f'(x) > 0$.
   c. En déduire les variations de f.
2. **a.** Démontrer que C_f admet un point d'inflexion et déterminer l'équation de la tangente T à C_f en ce point.
   b. Montrer que T passe par le point de coordonnées $A(4; 5)$.

20 On considère la fonction f définie sur l'ensemble $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2+10x-16}{x^2}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Étudier la limite de f en $-\infty$, 0 et $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $x \in D_f$, on a $f'(x) = \frac{-10x+32}{x^3}$ et en déduire le tableau de variations de f
3. Montrer que pour tout $x \in D_f$, on a $f''(x) = \frac{20x-96}{x^4}$ et étudier la convexité de f.
   $\mathcal{C}$ admet-elle un point d'inflexion ?

17 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$, 0 et $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ puis construire le tableau de variations de f.
3. Étudier la convexité de f.

18 Soit f la fonction inverse, a, b, λ trois réels avec a et b non nuls et de même signe et $\lambda \in [0; 1]$.

1. Justifier que $\lambda a + (1-\lambda)b$ est non nul et du même signe que a et b.
2. Montrer que

$$\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) - f(\lambda a + (1-\lambda)b) = \frac{\lambda(1-\lambda)(a-b)^2}{ab(\lambda a + (1-\lambda)b)}.$$

3. Étudier alors la convexité de f.

19 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3-1}{(x+1)^2}$.

A – Étude des variations de *f*

1. Préciser l'ensemble de définition D de f.
2. Vérifier que pour tout $x \in D$, $f'(x) = \frac{x^3+3x^2+2}{(x+1)^3}$
3. On pose
   $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2.$
   a. Calculer $g'(x)$.
   b. Déterminer les variations de g.
   c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une seule solution α sur l'intervalle $[-4; -3]$ et qu'il n'y a pas d'autres solutions dans $\mathbb{R}$.
   Donner un encadrement à 10^{-3} de α.
   d. Donner le signe de $g(x)$.

f:=(x^3-1)/(x+1)^2 $\frac{x^3-1}{(x+1)^2}$
df:=factoriser(deriver(f)) $\frac{x^3+3x^2+2}{(x+1)^3}$
factoriser(deriver(df)) $\frac{6(x-1)}{(x+1)^4}$

4. Déduire de ce qui précède le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

B – Recherche de points d'inflexion

5. Utiliser l'impression d'écran du logiciel de calcul formel ci-dessus pour déterminer $f''(x)$. En déduire l'existence d'un point d'inflexion I pour la courbe de f.

6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point I.

C – Encadrement de $f(\alpha)$

7. Montrer que $f(\alpha) = \frac{6\alpha}{(\alpha+1)^2} - 3$.
8. Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{6x}{(x+1)^2} - 3$ est décroissante sur $]-\infty; -1[$ et déduire de l'encadrement de α un encadrement de $f(\alpha)$.

Problèmes

21 On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

Partie A – Étude théorique

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie par $f(x) = (x+2)e^{-0,5x}$ sur l'intervalle $[0; 15]$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. Justifier que $f'(x) = -0{,}5xe^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 15]$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0{,}1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; 15]$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.
4. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	deriver((x+2)∗exp(-0.5∗x))
	exp(-0.5x)-0.5∗exp(-0.5x)∗(x+2)
2	deriver(exp(-0.5∗x)-0.5∗exp (-0.5∗x)∗(x+2))
	-exp(-0.5∗x)+0.25∗exp (-0.5∗x)∗(x+2)
3	factoriser(-exp(-0.5∗x)+0.25∗exp(-0.5∗x)∗(x+2))
	(0.25∗x-0.5)∗exp (-0.5∗x)

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

Partie B – Interprétation des résultats

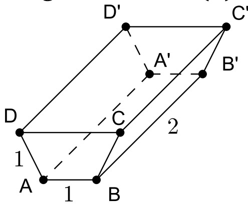
1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

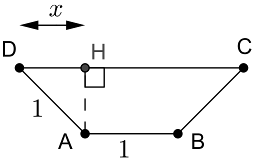
22 Un récipient a la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle $ABCD$.

Toutes les dimensions de ce prisme sont fixes, sauf la longueur CD. On donne $AB = BC = AD = 1$ et $BB' = 2$.

On cherche la dimension à donner à la grande base $[CD]$ du trapèze $ABCD$ pour que le volume du récipient soit maximal.

On appelle H le projeté orthogonal de A sur $[CD]$. On note x la longueur HD et $V(x)$ le volume du récipient.





1. Quel est l'ensemble de définition de V ?
2. Exprimer l'aire du trapèze $ABCD$ en fonction de x.
3. Démontrer que $V(x) = 2(x+1)\sqrt{1-x^2}$.
4. Montrer que $V'(x) = -\frac{2(2x^2+x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. Déterminer pour quelle valeur de x le volume est maximal.

23 **(Strophoïde)** Dans un repère orthonormé, on considère le point $F(1; 0)$ et un point variable A de l'axe des ordonnées d'ordonnée $t \in \mathbb{R}$.

On appelle S l'ensemble des points M de la droite (AF) tels que $MA = OA$ lorsque A varie sur l'axe des ordonnées et on appelle strophoïde l'ensemble $S' = S \cup \{F\}$.

Étant donné deux réels x et y, on appelle **P** la propriété :

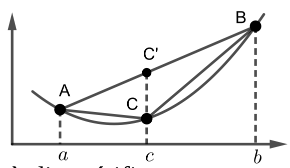
$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 + (y-t)^2 = t^2 \\ y = t(1-x) \end{cases}.$$

1. Montrer que $M(x; y) \in S \Leftrightarrow$ **P**.
2. **a.** Montrer que si $x \neq 1$, on a l'équivalence
$$\mathbf{P} \Leftrightarrow x^2(1-x) = y^2(1+x).$$
b. En déduire
$$M(x; y) \in S' \Leftrightarrow x^2(1-x) = y^2(1+x).$$
3. Montrer que si $(x; y) \in S'$, alors $-1 < x \leq 1$. Comment cela se traduit-il graphiquement pour S' ?
4. Soit $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ définie sur $]-1; 1]$. Montrer
$$M(x; y) \in S' \Leftrightarrow \big(y = f(x) \text{ ou } y = -f(x)\big).$$
En déduire que S' est la réunion des courbes de f et $-f$.
5. Montrer que $f'(x) = \frac{-x^2-x+1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. Construire le tableau de variations de f et le compléter avec la limite en -1.

24 Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x(4-x)}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que f est dérivable sur $]0; 4[$ et donner f'.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? En 4 ?
4. Étudier les variations de f.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions sur $[0; 4]$.
6. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
7. Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse $3 - \sqrt{3}$.

25 Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et a, b, c trois réels tels que $a < c < b$.



1. Démontrer qu'il existe une unique fonction affine qui coïncide avec f en a et b, c'est-à-dire vérifiant
$$g(a) = f(a) \text{ et } g(b) = f(b).$$
Donner l'expression de g.
2. En calculant de trois façons le coefficient directeur de la droite (AB), démontrer le théorème des trois cordes :
$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$
3. Montrer que tout $x_0 \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante sur $I - \{x_0\}$. Autrement dit, il y a croissance des pentes des cordes dont on fixe une extrémité.
4. On suppose f dérivable sur I. Montrer que f' est croissante sur I.