Produit scalaire dans l'espace

1. Produit scalaire dans l'espace

❖ **Définitions, vecteurs orthogonaux**

Définition. *Étant donné deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2).$$

Si le produit scalaire de deux vecteurs est nul, on dit que ces vecteurs sont orthogonaux.

On en déduit immédiatement le théorème suivant.

Théorème.
1. Le produit scalaire est symétrique, c'est-à-dire $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.
2. Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul : $\vec{u}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{v}=0$.
3. Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par lui-même, appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et noté $\vec{u}^2$, est égal à sa norme au carré : $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.

Démonstration.
1. Comme $\|\vec{v}-\vec{u}\|=\|-(\vec{u}-\vec{v})\|=|-1|\|\vec{u}-\vec{v}\|=\|\vec{u}-\vec{v}\|$, on a

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)=\frac{1}{2}(\|\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}-\vec{u}\|^2)=\vec{v}\cdot\vec{u}.$$

2. Puisque $\|\vec{0}\|=0$, il vient

$$\vec{u}\cdot\vec{0}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{0}\|^2-\|\vec{u}-\vec{0}\|^2\right)=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2-\|\vec{u}\|^2)=0.$$

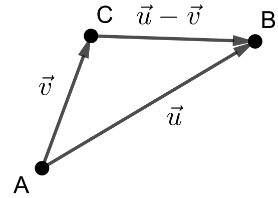
Par symétrie du produit scalaire, on en déduit que $\vec{0}\cdot\vec{v}=0$.
3. Par définition

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{u}\|^2-\|\vec{u}-\vec{u}\|^2)=\frac{1}{2}\left(2\|\vec{u}\|^2-\|\vec{0}\|^2\right)=\|\vec{u}\|^2.\ \blacksquare$$

Le point **3.** du théorème précédent permet alors de démontrer la reformulation de la définition du produit scalaire suivante.

Corollaire. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ un représentant de $\vec{v}$. Alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2).$$



Démonstration. En effet par définition $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right)$ mais d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$, d'où $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{CB}\|^2\right)$ et le résultat puisque $\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$, $\|\overrightarrow{AC}\|^2=AC^2$ et $\|\overrightarrow{CB}\|^2=CB^2=CB^2$. $\blacksquare$

L'intérêt de la notion de vecteurs orthogonaux réside dans le théorème suivant.
Le point **2.** du théorème précédent montre le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur. Dans le cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, la notion de vecteurs orthogonaux prend tout son intérêt dans le théorème suivant.

Théorème. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Démonstration. D'après le corollaire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$. Par suite

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 - BC^2 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

et ceci équivaut à dire que le triangle ABC est rectangle en A d'après le théorème de Pythagore. ■

Théorème. Pour tous points A, B, C, avec $A \neq B$ et $A \neq C$, on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

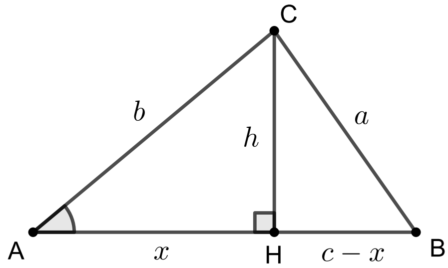
Puisque $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$, l'égalité se reformule ainsi sans produit scalaire :

$$2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = AB^2 + AC^2 - BC^2.$$

C'est cela que nous allons démontrer (cette formule porte parfois le nom d'Al-Kashi).

Démonstration. Notons H le pied de la hauteur issue de C et posons $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $h = CH$ et $x = AH$.
Le démonstration nécessite d'envisager trois cas :

- l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu et $H \in [AB]$;
- l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu et $H \notin [AB]$;
- l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus (et alors $H \notin [AB]$).



Envisageons le premier cas, les deux autres sont laissés en exercice (rappel pour le troisième cas : $\cos(\pi - x) = -\cos x$).
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AHC on a $b^2 = h^2 + x^2$, d'où l'on déduit, avec ce même théorème dans le triangle BCH :

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2 = \underbrace{h^2 + x^2}_{=b^2} + c^2 - 2cx = b^2 + c^2 - 2cx.$$

Or, dans le triangle rectangle HAC, on a $\cos \widehat{BAC} = \frac{x}{b}$, d'où $x = b \cos \widehat{BAC}$ et en remplaçant :

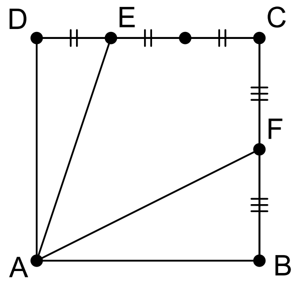
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{BAC},$$

ce qui est la formule annoncée. ■

__Exemple A__

Soit $ABCD$ un carré de côté 6, E le point défini par $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et F le milieu de $[BC]$. Afin de calculer l'angle $\widehat{FAE}$, évaluons de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$.

- D'une part $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(AE^2 + AF^2 - EF^2)$. D'après le théorème de Pythagore, on a
  - ✓ $AE^2 = 6^2 + 2^2 = 40$
  - ✓ $AF^2 = 6^2 + 3^2 = 45$
  - ✓ $EF^2 = 4^2 + 3^2 = 25$.



Ainsi $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(40+45-25)=30$.

- D'autre part, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=AE\times AF\times\cos\widehat{EAF}$.

On vient de calculer $AE=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ et $AF=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$, d'où

$$\cos\widehat{EAF}=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}}{AE\times AF}=\frac{30}{2\sqrt{10}\times 3\sqrt{5}}=\frac{30}{6\sqrt{2}\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{30}{30\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Comme la mesure de $\widehat{EAF}$ est entre 0 et 180°, on en déduit que $\widehat{EAF}=45°$.

❖ Base orthonormée

Définition. *Une base de l'espace $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ est dite* <u>*orthonormée*</u> *si*

$$\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{k}\|=1 \textit{ et } \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{\imath}\cdot\vec{k}=\vec{\jmath}\cdot\vec{k}=0.$$

Théorème. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base orthonormée $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. Alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'.$$

Démonstration. On a $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2+z^2$ et $\|\vec{v}\|^2=x'^2+y'^2+z'^2$ (Pythagore…).

D'autre part $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(y-y')^2$.

Par définition du produit scalaire, il vient

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2-(z'-z)^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-x^2+2xx'-x'^2-y^2+2yy'-y'^2-z'^2\right.\\&\qquad\left.+2zz'-z^2\right)\\&=\frac{1}{2}(2xx'+2yy'+2zz')\\&=xx'+yy'+zz'.\ \blacksquare\end{aligned}$$

<u>**Exemple A**</u>

Introduisons un repère orthonormé adapté à la situation, c'est-à-dire dans lequel $AB=6$ et $AD=6$, par exemple $\left(A;\frac{1}{6}\overrightarrow{AB};\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}\right)$. On a $\overrightarrow{AE}\binom{2}{6}$ et $\overrightarrow{AF}\binom{6}{3}$, d'où

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=2\times 6+6\times 3=30.$$

L'expression du produit scalaire en repère orthonormé permet de montrer l'important théorème suivant qui donne les propriétés de calcul sur le produit scalaire.

Théorème (bilinéarité du produit scalaire). Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel. On a
1. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ et $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (linéarité à gauche) ;
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=\lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (linéarité à droite).
3. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$.

Démonstration. On se place dans base orthonormée dans laquelle $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$.

1. Comme $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x'+x \\ y'+y \\ z'+z \end{pmatrix}$, on a d'une part

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} &= (x+x')x''+(y+y')y''+(z+z')z'' \\ &= xx''+x'x''+yy''+y'y''+z'z''+z'z''\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w} = xx''+yy''+zz''+x'x''+y'y''+z'z'',$$

ce qui démontre l'égalité $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$.

De même puisque $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$, il vient

$$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda xx'+\lambda yy'+\lambda zz' = \lambda(xx'+yy'+zz') = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v}).$$

2. La linéarité à droite se montre de façon analogue.

3. En utilisant la linéaire à gauche,

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})+\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$$

puis en utilisant deux fois la linéarité à droite il vient

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}.$$

Enfin puisque $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ par symétrie, on a bien

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2. \blacksquare$$

On remarque donc que le produit scalaire se comporte avec l'addition des vecteurs de la même manière que la multiplication avec l'addition des réels.

2. Orthogonalité

❖ Orthogonalité de deux droites de l'espace

Définition. *Deux droites (d_1) et (d_2) sont dites* <u>*orthogonales*</u> *si on peut trouver un point I tel que les parallèles à ces droites passant par I sont perpendiculaires. On note $(d_1)\perp(d_2)$.*

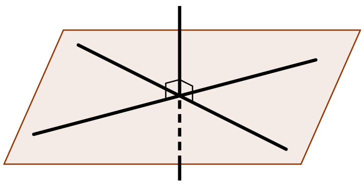
Il est clair que deux droites sont orthogonales si et seulement si leur vecteurs directeurs sont normaux.

Le théorème suivant est évident.

Théorème. Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

❖ Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition. *Une droite (D) et un plan (P) sont dits* <u>*perpendiculaires*</u> *ou* <u>*orthogonaux*</u> *si (D) est orthogonale à deux droites sécantes de (P).*

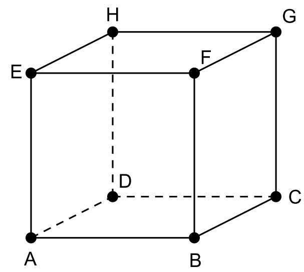


Théorème. Une droite (d) est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de ce plan.

Démonstration. Si (d) est orthogonale à toute droite du plan P, alors elle est orthogonale à (d_1) et (d_2).
Réciproquement, si $\vec{u}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont des vecteurs directeurs des droites (d), (d_1) et (d_2) alors $\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$ puisque (d) est orthogonale à (d_1) et (d_2).
Soit Δ une droite de P et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.
Les droites (d_1) et (d_2) étant sécantes, les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires et constituent donc une base du plan P. Il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2}$.
Il en résulte que $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2}) = x\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_1} + y\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$. Cela prouve que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, donc que la droite (d) est orthogonale à la droite Δ. ■

Exemple

Soit $ABCDEFGH$ un cube.
La droite (AE) est perpendiculaire à (AB) et à (AD), donc elle est orthogonale au plan (ABD).
Comme (BD) est incluse dans ce plan, on en déduit que les droites (AE) et (BD) sont orthogonales.



Théorème.
1. Il existe une unique droite (d) passant par un point A et orthogonale à un plan (P).
2. Il existe un unique plan (P) passant par un point A et orthogonale à une droite (d).
3. Si deux droites (d) et (d') sont parallèles et si (d) est orthogonal à (P), alors (d') est orthogonal à (P).
4. Si deux droites (d) et (d') sont orthogonales à un même plan (P), alors elles sont parallèles.
5. Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, toute droite (d) orthogonale à (P) est orthogonale à (P').

3. Vecteur normal à un plan et équation cartésienne de plan

Définition. *Un* *vecteur normal* *à un plan P est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à P.*

Puisqu'une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan, *un vecteur est normal à un plan si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan.*

Exemple A

Soit $A(3;1;1)$, $B(1;2;8)$ et $C(-2;-2;2)$.
Montrons que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan (ABC).
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$, et comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires de (ABC), le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

Théorème. Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'unique plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Démonstration. Soit $(\vec{u}\,;\vec{v})$ une base P. On a $\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et s'il existait x et y tels que $\vec{n} = x\vec{u} + y\vec{v}$, on aurait

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = (x\vec{u} + y\vec{v}) \cdot \vec{n} = x\vec{u} \cdot \vec{n} + y\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

d'où $\|\vec{n}\|^2 = 0$, puis $\vec{n} = \vec{0}$, ce qui serait contraire à l'hypothèse $\vec{n} \neq \vec{0}$. Cela prouve que $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{n})$ est une base de l'espace et qu'alors, pour tout pour M, il existe trois réels x, y, z tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{n}$. Ainsi

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{n}) \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow x\vec{u} \cdot \vec{n} + y\vec{v} \cdot \vec{n} + z\vec{n} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow z\|\vec{n}\|^2 = 0.$$

Or $\|\vec{n}\|^2 \neq 0$, donc finalement

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} \Leftrightarrow M \in P. \ \blacksquare$$

Théorème. Dans un repère orthonormé, un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où d est un réel.
Réciproquement, si a, b, c, d sont quatre réels avec a, b, c non tous nuls, l'ensemble P des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration. Soit $A(x_0; y_0; z_0)$ un point du plan P et $M(x; y; z)$ un point de l'espace. On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$. Ainsi $M \in P$ équivaut à

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ce qui peut s'écrire $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$, ou encore

$$ax + by + cz + d = 0$$

si l'on pose $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.
Réciproquement, supposons par exemple que $a \neq 0$ (la démonstration est identique si $b \neq 0$ ou $c \neq 0$). Alors $A\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ appartient à P et l'équation $ax + by + cz + d = 0$ équivaut à

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = 0$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ où $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ainsi P est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$. $\blacksquare$

Exemple A

On a vu que $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan (ABC), avec $A(3; 1; 1)$, $B(1; 2; 8)$ et $C(-2; -2; 2)$.
D'après le théorème précédent, l'équation du plan (ABC) est donc de la forme

$$2x - 3y + z + d = 0$$

où d est un réel. Or $A \in (ABC)$ se traduit par $2 \times 3 - 3 \times 1 + 1 + d = 0$, d'où $d = -4$ et finalement l'équation du plan (ABC) est

$$2x - 3y + z - 4 = 0.$$

On peut vérifier l'exactitude du résultat en remplaçant x, y, z successivement par les coordonnées de A, B, C.

4. Intersections de plans et de droites

❖ **Intersection d'une droite et d'un plan**

Théorème. Soit (d) une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et P un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (d) et le plan P sont sécants.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, alors soit (d) est incluse dans P (si $A \in P$), soit (d) et P sont strictement parallèles (si $A \notin P$).

❖ **Intersection de deux plans**

Théorème. Soit deux plans P et P' de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

1. Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires, alors P et P' sont parallèles.
2. Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, alors P et P' sont sécants.

La traduction analytique de ce théorème est le suivant.

Théorème. On se place dans un repère orthonormé.

1. Les plans P et P' d'équations respectives
$$ax + by + cz + d = 0 \text{ et } a'x + b'y + c'z + d' = 0$$
sont sécants si et seulement si $(a; b; c)$ n'est pas proportionnel à $(a'; b'; c')$.
2. Lorsque $(a; b; c)$ n'est pas proportionnel à $(a'; b'; c')$, l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x; y; z)$ vérifient $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est une droite.

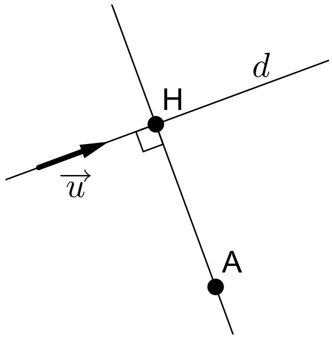
Exemple

Considérons les plans P et P' d'équations respectives
$$x + y - 2z + 7 = 0 \text{ et } 2x - y + z - 1 = 0.$$
Comme $(1; 1; -2)$ et $(2; -1; 1)$ ne sont pas proportionnels, ces plans sont sécants selon une droite Δ. Déterminons-en une équation paramétrique. Pour cela, on résout le système obtenu en considérant l'une des trois variables, z par exemple, comme paramètre.
$$\begin{cases} x + y - 2z + 7 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2z - 7 \\ 2x - y = 1 - z \end{cases}.$$
On résout le système en x et y :
$$\begin{cases} x + y = 2z - 7 \\ 2x - y = 1 - z \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3x = z - 6 \\ 3y = 5z - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}z - 2 \\ y = \frac{5}{3}z - 5 \end{cases}.$$
Posant $z = 3t$, une représentation paramétrique de Δ est
$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 5t - 5 \\ z = 3t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

❖ **Plans perpendiculaires**

Définition. *Deux plans sont dits <u>perpendiculaires</u> si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.*

5. Distance d'un point à une droite (complément)



Considérons une droite d de l'espace et un point A de l'espace n'appartenant pas à d.
Soit H le projeté orthogonal de A sur d. Il s'obtient par exemple comme l'intersection de d avec le plan Q passant par A de vecteur normal $\vec{u}$.
En prenant un point M sur d on constate alors que

$$AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right)^2 = \overrightarrow{AH}^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM}^2$$

Et comme $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{HM}$, on a donc

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \geq AH^2.$$

Ce qui prouve que pour tout $M \in d$, on a $AM \geq AH$. De plus

$$AM = AH \Leftrightarrow AM^2 = AH^2 \Leftrightarrow AH^2 + HM^2 = AH^2 \Leftrightarrow HM^2 = 0 \Leftrightarrow HM = 0 \Leftrightarrow M = H.$$

Cela prouve que la distance de A à un point M de la droite est minimale si et seulement si $M = H$. La distance AH s'appelle distance de A à d.

Voyons deux méthodes pour la détermination de H et donc de la distance de A à d.

Soit $A(0; 1; 1)$ et D la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

❖ **Calcul du minimum de AM**

Le carré de la distance d'un point $M \in d$ au point A est donnée par

$$AM^2 = \left(-\frac{1}{3} + t - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 + (t-1)^2 = 2t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{26}{9}.$$

Comme la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$, AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimale. Ce trinôme du second en t atteint son minimum $t = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{3}$, donc le point H a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ et la distance vaut donc $\sqrt{2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{26}{9} = \frac{18}{9}} = \sqrt{2}$.

❖ **Avec le plan passant Q**

Le plan Q est dirigé par un vecteur directeur de d, par exemple $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; il a donc pour équation $x + z - 1 = 0$ puisque $P \in Q$. L'intersection de Q et d est donnée par

$$-\frac{1}{3} + t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

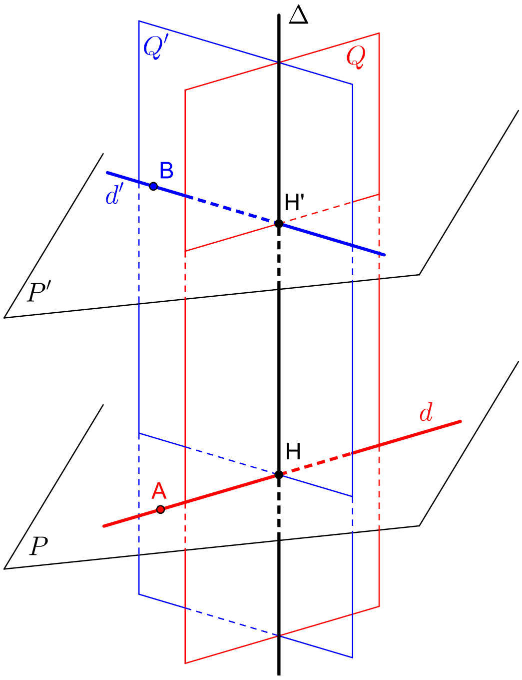
et l'on termine comme précédemment.

6. Perpendiculaire commune à deux droites (complément)

Théorème (de la perpendiculaire commune). Soit deux droites d et d' non coplanaires. Il existe une unique droite perpendiculaire à d et d'.

Démonstration. Existence. Soit

- $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et A l'un de ses points ;
- $\vec{v}$ un vecteur directeur de d' et B l'un de ses points.



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires puisque les droites d et d' ne sont pas parallèles. Considérons

- P le plan passant A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il contient d et est parallèle à d' ;
- P' le plan passant B et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il contient d' et est parallèle à d.

Les plans P et P' sont parallèles, soit $\vec{n}$ un de leur vecteur normal. Considérons alors

- Q le plan passant par A dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{n}$. Il est perpendiculaire à P et contient d ;
- Q' le plan passant par B dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{n}$. Il est perpendiculaire à P' et contient d'.

Les plans Q et Q' ne sont pas parallèles, sinon les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{n}$ serait coplanaires. Soit $\Delta = Q \cap Q'$ leur droite d'intersection, elle est dirigée par $\vec{n}$.
Puisque Δ est orthogonale au plan P, elle est orthogonale à d. De plus ces droites sont sécantes (dans le plan Q), donc elles sont perpendiculaires. Il en est de même de Δ et d'.
Ainsi Δ est une perpendiculaire commune à d et d'.

Unicité. Soit Δ' une perpendiculaire commune à d et d' et $\overrightarrow{n'}$ un de ses vecteurs directeurs. Vu que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est une base de l'espace, il existe des réels a, b, c tels que

$$\overrightarrow{n'} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{n}.$$

Comme $\Delta' \perp d$ on a $\vec{u} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$. Mais

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{n'} = \vec{u} \cdot (a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{n}) = a\vec{u} \cdot \vec{u} + b\vec{u} \cdot \vec{v} + c\vec{u} \cdot \vec{n} = a\|\vec{u}\|^2,$$

la dernière égalité résultant du fait que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Ainsi $0 = a\|\vec{u}\|^2$ et comme le vecteur $\vec{u}$ est non nul, il vient que $a = 0$. On montre de la même façon que $b = 0$. Finalement $\overrightarrow{n'} = c\vec{n}$, ce qui prouve que les droites Δ et Δ' sont parallèles.
Les droites d et Δ sont incluses dans le plan Q, et comme Δ' est parallèle à Δ et qu'elle est sécante à d, on obtient que $\Delta' \subset Q$. De même $\Delta' \subset Q'$.
Finalement $\Delta' \subset Q \cap Q'$ et comme $\Delta = Q \cap Q'$, c'est que $\Delta' = \Delta$, ce qui prouve qu'il n'existe qu'une seule droite perpendiculaire à d et d'. ■

❖ Distance entre deux droites

On garde les notations précédentes. Soit $H = P \cap \Delta$ et $H' = P' \cap \Delta$. Montrons que la plus courte distance entre deux points de d et d' est HH'.

Soit $A \in d$ et $B \in d'$. On a

$$AB^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'B}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'B}\right)^2 = \left(\overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B}\right)^2.$$

En développant, il vient

$$AB^2 = \overrightarrow{HH'}^2 + 2\overrightarrow{HH'} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B}\right) + \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B}\right)^2.$$

Le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{H'B}$, donc $\overrightarrow{HH'} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B}\right) = 0$. On en déduit

$$AB^2 = HH'^2 + \left\|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B}\right\|^2.$$

Cela montre que $AB \geq HH'$. L'égalité a lieu si et seulement si $\left\|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B}\right\|^2 = 0$, soit $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'B} = \vec{0}$. Or comme il existe deux réels k et k' tels que $\overrightarrow{AH} = k\vec{u}$ et $\overrightarrow{H'B} = k'\vec{v}$, cela revient à $k\vec{u} + k'\vec{v} = \vec{0}$. Comme les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, la seule possibilité est que $k = k' = 0$, d'où $A = H$ et $B = H'$.

Cela montre que la distance minimale entre un point $A \in d$ et $B \in d'$ est HH' atteinte si et seulement $A = H$ et $B = H'$.

Exemple

Considérons les droites D et D' d'équations paramétriques respectives

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 2 + 4s \\ y = -9 + 4s \\ z = 7 + s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

Elles passent respectivement $A(-1; 0; 2)$ et $B(2; -9; 7)$ et sont dirigées par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas coplanaires.

Cherchons un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les égalités $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ donnent

$$\begin{cases} 3a + 2b - c = 0 \\ 4a + 4b + c = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} c = 3a + 2b \\ 7a + 6b = 0 \end{cases}$$

Pour satisfaire la seconde équation on peut prendre $a = 6$ et $b = -7$, d'où $c = 4$. On obtient donc comme vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Considérons les plans

- Q passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{n}$;
- Q' passant par B et dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{n}$.

L'intersection de Q et Q' est la perpendiculaire commune Δ à D et D'. Pour déterminer cette intersection, on peut soit utiliser les équations paramétriques, soit les équations cartésiennes. Donnons les deux méthodes.

Ces plans ont pour représentations paramétriques

$$\begin{cases} x = -1 + 3t + 6t' \\ y = 0 + 2t - 7t' \\ z = 2 - t + 4t' \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 2 + 4s + 6s' \\ y = -9 + 4s - 7s' \\ z = 7 + s + 4s' \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} -1 + 3t + 6t' = 2 + 4s + 6s' \\ 2t - 7t' = -9 + 4s - 7s' \\ 2 - t + 4t' = 7 + s + 4s' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t' = 3 - 3t + 4s + 6s' \\ -7t' = -9 - 2t + 4s - 7s' \\ 4t' = 5 + t + s + 4s' \end{cases}$$

Il y a 4 inconnues et seulement 3 équations, ce qui est normal puisque « la solution » de ce système est une droite. Considérons par exemple t' comme paramètre.

En faisant $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$ et $L_2 \leftarrow L_1 + 2L_3$, il vient

$$\begin{cases} 18t' = 18 + 7s + 18s' \\ t' = 1 + 6s + s' \\ 4t' = 5 + t + s + 4s' \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 18L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 0 = -101s \\ t' = 1 + 6s + s' \\ t = 5 + s + 4s' - 4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t' = 1 + s' \\ t = -1 \end{cases}$$

Cela montre qu'en faisant $t = -1$ dans l'équation de Q (ou $s = 0$ dans celle de Q'), on obtient une représentation paramétrique de Δ :

$$\begin{cases} x = -4 + 6t' \\ y = -2 - 7t', \ t' \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + 4t' \end{cases}$$

Retrouvons ce résultat en utilisant les équations cartésiennes de plan. On cherche un vecteur normal de Q, donc orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{n}$, ce qui à l'aide des produits scalaires conduit à

$$\begin{cases} 3a + 2b - c = 0 \\ 6a - 7b + 4c = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} c = 3a + 2b \\ 18a + b = 0 \end{cases}$$

Pour satisfaire la seconde équation, $a = -1$ et $b = 18$ conviennent, d'où $c = 33$. Ainsi $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} -1 \\ 18 \\ 33 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q, d'où $Q: -x + 18y + 33z - 67 = 0$.

De même $\vec{v} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$ donnent

$$\begin{cases} 4a + 4b + c = 0 \\ 6a - 7b + 4c = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} c = -4a - 4b \\ -10a - 23b = 0 \end{cases}$$

Pour satisfaire la seconde équation, $a = 23$ et $b = -10$ conviennent, d'où $c = -52$. Ainsi $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 23 \\ -10 \\ -52 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q', d'où $Q': 23x - 10y - 52z + 228 = 0$.

L'intersection des plans Q et Q' se détermine en résolvant le système.

$$\begin{cases} -x + 18y + 33z - 67 = 0 \\ 23x - 10y - 52z + 228 = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 23L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -x + 18y + 33z - 67 = 0 \\ 404y + 707z - 1313 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation se simplifie par 101 et donne $4y + 7z - 13 = 0$, d'où

$$\begin{cases} -x + 18y + 33z - 67 = 0 \\ 4y + 7z - 13 = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow 9L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x - 3z + 17 = 0 \\ 4y + 7z - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3z-17}{2} \\ y = \frac{13-7z}{4} \end{cases}$$

Une équation paramétrique de Δ est donc

$$\begin{cases} x = \frac{3t-17}{2} \\ y = \frac{13-7t}{4}, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

En posant $t = 3 + 4t'$, on retrouve le paramétrage précédent, ce qui évite les fractions.

L'intersection de D et Δ s'obtient en résolvant

$$\begin{cases} -1 + 3t = -4 + 6t' \\ 2t = -2 - 7t' \\ 2 - t = 3 + 4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -t + 2t' \\ 2t = -2 - 7t' \\ -1 = t + 4t' \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 0 = 6t' \\ 2t = -2 - 7t' \\ -1 = t + 4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ -2 = -2 \\ t = -1 \end{cases}$$

Donc $\Delta \cap D = H(-4; -2; 3)$.

De même pour D' et Δ :

$$\begin{cases} 2 + 4s = -4 + 6t' \\ -9 + 4s = -2 - 7t' \\ 7 + s = 3 + 4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3t' - 2s \\ 4s = 7 - 7t' \\ 4 = 4t' - s \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -5 = -5t' \\ 2t = -2 - 7t' \\ 4 = 4t' - s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ s = 0 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

Donc $\Delta \cap D = H'(2; -9; 7)$.

Enfin la distance entre les droites D et D' est

$$HH' = \sqrt{\left(2 - (-4)\right)^2 + \left(-9 - (-2)\right)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{101}.$$