Logarithme népérien

1. Logarithme népérien d'un réel strictement positif

❖ Définition

La fonction exponentielle est une fonction strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution pour tout réel $k > 0$.

Définition. *Pour tout réel strictement positif k, on appelle* <u>*logarithme népérien*</u> *de k l'unique solution de l'équation $e^x = k$. On la note* $\ln k$.

Par exemple $\ln 1 = 0$ (puisque $e^0 = 1$) et $\ln e = 1$ (puisque $e^1 = e$).

Voici quelques propriétés résultant de la définition.

1. Pour tout réel $k > 0$, $\ln k$ est la solution de l'équation $e^x = k$, par conséquent $\boldsymbol{e^{\ln k} = k}$.

2. Pour tout réel k, $\ln e^k$ est l'unique solution de l'équation $e^x = e^k$; comme k est aussi une solution de cette équation, il vient $\boldsymbol{\ln(e^k) = k}$.

❖ Propriétés de calcul

Théorème. Pour tous réels strictement positifs x et y et tout entier relatif n,

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

2. $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$, en particulier $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

3. $\ln x^n = n \ln x$

4. $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

Démonstration.

1. D'une part $e^{\ln(xy)} = xy$ et d'autre part $e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x}e^{\ln y} = xy$. On a donc

$$e^{\ln(xy)} = e^{\ln x + \ln y},$$

d'où $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

2. On a $\ln x = \ln\left(\frac{x}{y} \times y\right) = \ln\frac{x}{y} + \ln y$ d'après **1.**, ce qui montre que $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

Pour $x = 1$, on obtient $\ln\frac{1}{y} = \ln 1 - \ln y = -\ln y$, c'est la deuxième propriété.

3. On a $e^{n\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^n = x^n = e^{\ln x^n}$, d'où $n\ln x = \ln x^n$.

4. Comme $2\ln\sqrt{x} = \ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right) = \ln x$, on a bien la propriété annoncée. ■

Remarque.

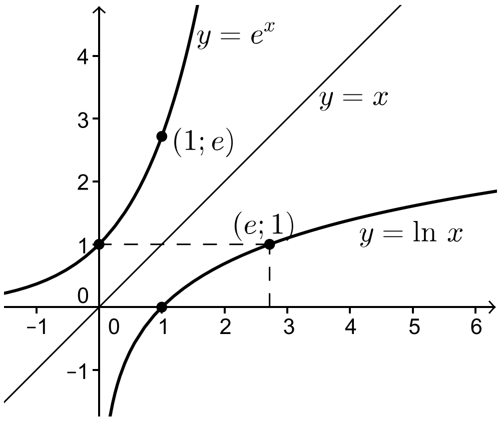
1. Si n est un entier pair, pour tout réel x non nul, on a $x^n > 0$ et $\ln(x^n)$ est défini.
- Si $x > 0$, d'après le théorème précédent, $\ln(x^n) = n\ln x$;
- si $x < 0$, on peut écrire $\ln(x^n) = \ln((-x)^n)$, et comme $-x > 0$, le théorème implique que $\ln((-x)^n) = n\ln(-x)$.

On peut donc regrouper ces formules en une seule : $\ln(x^n) = n\ln|x|$.

2. Si n est impair, pour $x < 0$, on a $x^n < 0$ et il n'y a pas lieu de considérer $\ln(x^n)$.

2. Fonction logarithme népérien, (in)équations

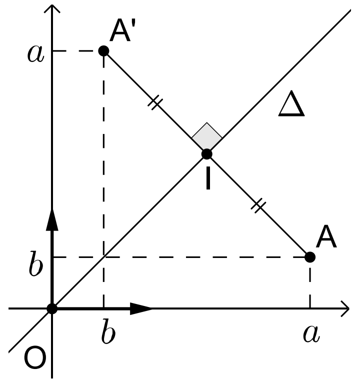
Définition. *La fonction logarithme népérien, noté* ln, *est la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $x \mapsto \ln x$.



❖ Représentation graphique de ln

Théorème. Dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

Démonstration. Commençons par prouver le résultat suivant : le symétrique d'un point $A(a;b)$ par rapport à la droite Δ est $A'(b;a)$. En effet



- le milieu du segment $[AA']$ a pour coordonnées $\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2}\right)$, il appartient donc à Δ ;
- les droites (AA') et Δ sont perpendiculaires car $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} b-a \\ a-b \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de la droite Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, d'où
$$\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 1 \times (b-a) + 1 \times (a-b) = 0.$$

En notant $\mathcal{C}_f$ la courbe d'une fonction f on peut écrire
$$M(x;y) \in \mathcal{C}_{\exp} \Leftrightarrow y = e^x \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x = \ln y \end{cases} \Leftrightarrow M'(y;x) \in \mathcal{C}_{\ln},$$
ce qui montre que les courbes $\mathcal{C}_{\exp}$ et $\mathcal{C}_{\ln}$ sont symétriques par rapport à Δ. ■

❖ Variations de ln et (in)équations

Soit x et y deux réels strictement positifs. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,
$$\ln x < \ln y \Leftrightarrow e^{\ln x} < e^{\ln y} \Leftrightarrow x < y.$$
Cela montre que la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Par ailleurs, comme $\ln 1 = 0$, les variations de ln et son signe peuvent se résumer dans le tableau ci-dessous.

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	‖ $-$	0 (croissante ↗)	$+$

On retiendra que

- Pour tout réel x, on a
$$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1,\ \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$
- Pour tous réels a et b, on a
$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a = b \end{cases} \text{ et } \ln a < \ln b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ 0 < a \end{cases}.$$

Exemple

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a. $7 - e^{x-1} = 3$

b. $\ln(3x+2) = \ln(x^2-2)$

c. $\ln(12-4x) \leq \ln(x+2)$

Réponse.

a. On a $7 - e^{x-1} = 3 \Leftrightarrow e^{x-1} = 4 \Leftrightarrow x - 1 = \ln 4$, donc $S = \{1 + \ln 4\}$.

b. On a $\ln(3x+2) = \ln(x^2 - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ 3x + 2 = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases}$.

L'équation du second degré $x^2 - 3x - 4 = 0$ a pour racine -1 et 4 ; Ainsi

$$\begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x = -1 \text{ ou } x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Donc $S = \{4\}$.

c. $\ln(12 - 4x) \leq \ln(x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 4x \leq x + 2 \\ 12 - 4x > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 \leq 5x \\ 12 > 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \\ 3 > x \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 3.$$

On conclut $S = [2; 3[$.

3. Application du logarithme népérien aux (in)équations avec des puissances

La propriété $\ln(x^n) = n \ln x$ permet de résoudre des équations dans lesquelles

- l'inconnue est en puissance ;
- l'inconnue apparaît avec une puissance élevée (supérieure ou égale à 3).

Exemple

Cherchons le plus petit entier tel que $2^n \geq 10^7$. En utilisant le caractère croissant de ln,

$$2^n \geq 10^7 \Leftrightarrow \ln 2^n \geq \ln 10^7 \Leftrightarrow n \ln 2 \geq 7 \ln 10 \Leftrightarrow n \geq \frac{7 \ln 10}{\ln 2}.$$

Comme $\frac{7 \ln 10}{\ln 2} \approx 23{,}3$, on en conclut que l'inégalité $2^n \geq 10^7$ a lieu dès que $n \geq 24$.

La vérification est immédiate : $2^{23} = 8\,388\,608 < 10^7$ et $2^{24} = 16\,777\,216 > 10^7$.

Exemple

Considérons la suite géométrique définie par $u_n = 0{,}5^n$. Puisque $-1 < 0{,}5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Cherchons le plus petit entier n tel que $u_n < 10^{-10}$. On connaît déjà deux méthodes, par lecture de la table de la calculatrice quand l'entier cherché n'est pas trop grand ou par utilisation d'un algorithme, rappelé ci-contre.

```
n ← 0
u ← 1
Tant que u > 10^(-10)
    u ← 0,5u
    n ← n + 1
Fin Tant que
Renvoyer n
```

On peut calculer cet entier en résolvant l'inéquation

$$u_n \leq 10^{-10} \Leftrightarrow 0{,}5^n \leq 10^{-10}.$$

Comme l'inconnue est en exposant, on transforme cette inéquation (dont les deux membres sont positifs) à l'aide de la fonction ln :

$$0{,}5^n \leq 10^{-10} \Leftrightarrow \ln 0{,}5^n \leq \ln 10^{-10} \Leftrightarrow n \times \ln 0{,}5 \leq -10 \times \ln 10.$$

Puisque $\ln 0{,}5 < 0$, on obtient

$$n \geq \frac{-10 \times \ln 10}{\ln 0{,}5} \approx 33{,}219$$

et le plus petit entier vérifiant $u_n \leq 10^{-10}$ est donc 34.

Il n'est pas plus difficile de déterminer le rang n à partir duquel $u_n \leq 10^{-1000}$. Cela a lieu dès que $n \geq \frac{-1000 \times \ln 10}{\ln 0{,}5} \approx 3321{,}9$, donc pour $n \geq 3322$.

En Python, l'algorithme ne fonctionnerait pas sur ce dernier exemple car le plus petit réel représentable est environ $4{,}94 \cdot 10^{-324}$. L'algorithme renverra 1076. En effet, selon Py-

thon $u_{1076} = 0$, alors que ce n'est pas le cas.
En réalité, $u_{1075} \approx 5 \cdot 10^{-324}$ (d'après Python), donc
$$u_{1076} = 0{,}5u_{1075} \approx 0{,}5 \times 5 \cdot 10^{-324} = 2{,}5 \cdot 10^{-324},$$
ce qui n'est pas inférieur à 10^{-1000}, mais nul pour Python car inférieur à $4{,}94 \cdot 10^{-324}$.

Exemple

Déterminons le nombre de chiffre de 7^{154}. Pour cela, on cherche l'entier p tel que $10^p \leq 7^{154} < 10^{p+1}$. Cette inéquation équivaut à $p \ln 10 \leq 154 \ln 7 < (p+1)\ln 10$, d'où $p \leq \frac{154 \ln 7}{\ln 10} < p + 1$. Comme $\frac{154 \ln 7}{\ln 10} \approx 130{,}1$, on en déduit
$$10^{130} \leq 7^{154} < 10^{131}$$
ce qui montre que 7^{154} s'écrit avec 131 chiffres.

Exemple

Résolvons les équations $x^8 = 38$ et $x^9 = 38$.

- 0 n'est visiblement pas solution de $x^8 = 38$, car $0^8 = 0 \neq 38$. Pour tout $x \neq 0$, on sait que $\ln x^8 = 8 \ln|x|$, donc, pour $x \neq 0$,
$$x^8 = 38 \Leftrightarrow \ln x^8 = \ln 38 \Leftrightarrow 8 \ln|x| = \ln 38 \Leftrightarrow \ln|x| = \frac{\ln 38}{8} \Leftrightarrow |x| = \exp\left(\frac{\ln 38}{8}\right).$$
Cette équation a donc deux solutions : $\pm \exp\left(\frac{\ln 38}{8}\right) \approx \pm 1{,}576$.
- Si $x \leq 0$, alors $x^9 \leq 0$, donc une solution de l'équation $x^9 = 38$ est nécessairement strictement positive. Pour $x > 0$, on a
$$x^9 = 38 \Leftrightarrow \ln x^9 = \ln 38 \Leftrightarrow 9 \ln x = \ln 38 \Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln 38}{9} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{\ln 38}{9}\right)$$
Cette équation a donc une solution : $\exp\left(\frac{\ln 38}{9}\right) \approx 1{,}498$.

Généralisation. Si n est un entier naturel et a un réel strictement positif, on a, pour tout $x > 0$,
$$x^n = a \Leftrightarrow \ln x^n = \ln a \Leftrightarrow n \ln x = \ln a \Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln a}{n} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{\ln a}{n}\right).$$
L'équation $x^n = a$ admet donc une unique solution sur $[0; +\infty[$. On l'appelle racine $n^{\text{ième}}$ de a et on la note $a^{\frac{1}{n}}$. En particulier $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ pour tout réel $a > 0$.
La notation a été choisie pour respecter les règles habituelles sur les puissances :
$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \times n} = a^1 = a.$$
Par exemple, la solution de $x^8 = 38$ est $38^{\frac{1}{8}}$ dont la calculatrice permet un calcul rapide sans résoudre l'équation comme ci-dessus.

```
e^(ln(38)/8)
       1.575697876
38^(1/8)
       1.575697876
```

4. Étude de la fonction logarithme népérien

❖ Dérivée de ln

On admet que la fonction ln est continue sur $]0; +\infty[$, cela permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème. La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction inverse :
$$\text{pour tout } x \in \,]0; +\infty[, \ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. Soit $a > 0$ et posons $r(x) = \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$. On doit démontrer que $\lim_{x \to a} r(x) = \frac{1}{a}$.
On a $r(x) = \frac{\ln x - \ln a}{e^{\ln x} - e^{\ln a}} = \frac{1}{\frac{e^{\ln x} - e^{\ln a}}{\ln x - \ln a}}$. La fonction ln étant continue en a, $\lim_{x \to a} \ln x = \ln a$, donc en posant $X = \ln a$, on a $\lim_{X \to \ln a} \frac{e^X - e^{\ln a}}{X - \ln a} = e^{\ln a} = a$ d'après la définition du nombre dérivée de la fonction exponentielle en $\ln a$.
Par composition des limites, on obtient $\lim_{x \to a} r(x) = \frac{1}{a}$, ce qui démontre que ln est dérivable en a de nombre dérivé $\frac{1}{a}$. ■

> **Théorème.** Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeur dans $]0; +\infty[$. Alors la fonction $\ln u : x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I et $\ln'(u) = \frac{u'}{u}$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$. Notons que le discriminant de $x^2 + 2x + 3$ est $-9 < 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 3 > 0$ ce qui prouve que f est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est dérivable et $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+3}$, et vu le signe de $2x + 2$, on en déduit que f est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

❖ **Limites aux bornes de la fonction ln**

> **Théorème.** On a les limites remarquables suivantes
> $$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Démonstration. Soit A un réel positif. Si $x > e^A$, alors $\ln x > A$. Comme A est arbitraire, cela prouve que $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
Pour la seconde limite, écrivons $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$. Puisque $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, on en déduit par composition $\lim_{x \to 0^+} \ln \frac{1}{x} = +\infty$ et donc $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$. ■

❖ **Croissance comparée**

> **Théorème.** Pour tout entier naturel n non nul, on a les résultats suivants.
> $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0.$$

On peut écrire $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{e^{n \ln x}} = \frac{1}{n} \times \frac{n \ln x}{e^{n \ln x}}$. Or $\lim_{x \to +\infty} n \ln x = +\infty$ (car $n \geq 1$) et $\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ d'après un résultat sur les fonctions exponentielles. Par composition, il vient $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.
En écrivant $x^n \ln x = -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^n}} = -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}$ et en notant que $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, la limite qui vient d'être calculée montre par composition que $\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$. ■

❖ **Une autre limite**

Théorème. On a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Démonstration. La fonction ln est dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est 1, donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = 1$, ce qui est bien la limite annoncée. ■

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ sur $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

- **Limite en $\pm\infty$.** Écrivons $f(x) = x \times \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, par composition le quotient $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ tend vers 1. Par produit on a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- **Limite en -1.** De $\lim\limits_{x \to -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, on en déduit que par composition que $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$.
- **Limite en 0^+.** Écrivons
$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}(1+x)\right) = x^2 \ln\frac{1}{x} + x^2 \ln(1+x) = -x^2 \ln x + x^2 \ln(1+x).$$
Clairement $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln(1+x) = 0$. En écrivant $-x^2 \ln x = -x(x \ln x)$ et en utilisant $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ on obtient par produit de limites que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.