Logarithme népérien – Exercices

Définition, relation fonctionnelle

1 Simplifier les nombres suivants.

a. $\ln e$ **b.** $e^{\ln 5}$ **c.** $\ln 1$

d. $e^{\ln 2}$ **e.** $\ln \sqrt{e}$ **f.** $\ln\left(\frac{(e^3)^2}{e^5}\right)$

2 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

a. $\ln 8$ **b.** $\ln \sqrt{32}$ **c.** $\ln \frac{1}{2}$

d. $\ln 32e$ **e.** $\ln \frac{e}{4}$ **f.** $\ln 64e^3$

3 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

a. $\ln 20$ **b.** $\ln 100$ **c.** $\ln 80e$

d. $\ln \sqrt{10}$ **e.** $\ln \frac{5}{4}$ **f.** $\ln \frac{5}{4e}$

4 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Pour tout réel x strictement positif
$$\ln x^3 - \ln x^2 = \ln x^{25} - \ln x^{24}.$$
b. Pour tout réel x strictement positif
$$(\ln x)^2 + \ln(x^3) > 0.$$
c. $\ln 2 + \ln 2^2 + \ln 2^3 + \ln 2^4 = 10 \ln 2.$

Équations et inéquations

5 Résoudre les équations suivantes.

a. $\ln x = 3$ **b.** $5 - 2e^x = 0$

c. $2 - 3e^x = 11$ **d.** $(x+2)\ln x = 0$

6 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $3\ln x + 2 > -1$ **b.** $e^x < 8$

c. $\ln x < 2$ **d.** $\ln(2x-5) < \ln(3-x)$

7 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a. $\ln(2x+4) = \ln 2$ **b.** $\ln(x+1) = \ln(2x+3)$

c. $\ln x\,(\ln x - 1) \geq 0$ **d.** $5\ln x - x\ln x = 0$

8 Déterminer le signe des fonctions suivantes.

a. $f_1(x) = -3\ln x$ **b.** $f_2(x) = (x-1)\ln x$

c. $f_3(x) = \frac{\ln x}{x-2}$ **d.** $f_4(x) = \ln(7x+3)$

9 Factoriser $X^2 - 3X - 4$ et en déduire les solutions des inéquations $\ln^2 x - 3\ln x - 4 \geq 0$ et $e^{2x} - 3e^x - 4 < 0$.

10 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a. $\ln(x^2 - 2x) = \ln(3 - 4x)$

b. $\ln(x^2 - 5) \geq \ln(x - 3)$

Puissances et ln

11 Résoudre les équations suivantes puis donner une valeur approchée à 10^{-3}.

a. $x^6 = 1{,}23$ **b.** $x^9 = 0{,}6$ **c.** $(5-x)^4 = 3$

12 Déterminer le plus petit entier n_0 tel que si $n \geq n_0$:

a. $0{,}9^n < 10^{-4}$ **b.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < 10^{-5}$ **c.** $1{,}3^n \geq 10^3$

d. $2^n \geq 300$ **e.** $n^2 3^n \geq 10^{2000}$ **f.** $2^n \geq n^{15}$

13 Une balle est lâchée de 100 mètres de haut et rebondit aux $4/5^{\text{ème}}$ de sa hauteur à chaque rebond. Au bout de combien de rebonds les rebonds sont inférieurs à 1 cm ?

14 En programmant un algorithme puis en résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier n tel que
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n \geq 10^6.$$

15 En 2018, le plus grand entier premier connu était $N = 2^{82\,589\,933} - 1$.

1. Déterminer $p \in \mathbb{N}$ tel que $10^p \leq N + 1 < 10^{p+1}$.

2. En déduire le nombre de chiffres de N.

Logarithme népérien et dérivée

16 Vrai ou faux ? Justifier.

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$. Si $f'(x) = \frac{1}{x}$, alors $f(x) = \ln x$.

17 Soit C la courbe représentative de la fonction ln.

1. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.

2. Montrer que la tangente T' à C au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

18 Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.

a. $f(x) = x^2 + \ln x$ **b.** $g(x) = 3 - \ln x$

19 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 3x$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Résoudre $f'(x) > 0$.

3. Dresser alors le tableau de variation de f.

20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln x$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et construire alors le tableau de variation de f.

3. Montrer que la tangente T à la courbe représentative C_f de f au point d'abscisse e est située au-dessous de C_f.

21 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par
$$f(x) = (\ln x)(2 - \ln x).$$
1. Étudier les variations de f.

2. Donner l'équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

22 Un banquier désire calculer le nombre n d'années nécessaire à un placement à un intérêt composés au taux de t % afin qu'il soit doublé.

1. a. Vérifier que cela revient à résoudre l'inéquation
$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geq 2.$$
b. Démontrer que n vérifie $n \geq \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$.

c. Compléter le tableau suivant.

Taux t	2 %	2,5 %	3 %	4 %	6 %
Nombre d'années					
$\frac{72}{t}$					

d. Émettre une conjecture : « un capital placé à intérêts composés au taux de t % nécessite approximativement . . . années pour doubler ».

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point d'abscisse 1.
3. En déduire que $\ln x \approx x-1$ pour $x \approx 1$.
4. Expliquer alors l'approximation faite à la question **1.d.**

Limites

23 Déterminer les limites des fonctions suivantes aux bornes de l'intervalle I.

a. $f(x)=\ln(1-3x)$; $I=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$.

b. $f(x)=\ln\frac{x+2}{x-3}$; $I=]3;+\infty[$.

c. $f(x)=\ln\sqrt{1-x}$; $I=]-\infty;1[$.

Études de fonctions

24 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

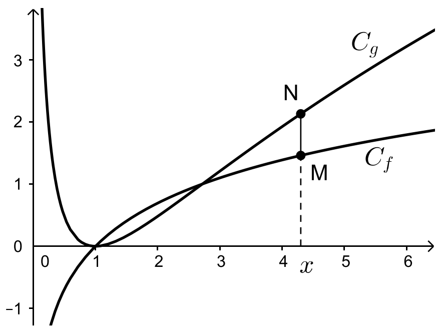
$$f(x)=\frac{x-1}{x}\ln x.$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x-1+\ln x$.
   b. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g.
2. **a.** Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
   b. Déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.
   c. Calculer les limites en 0 et $+\infty$ de f.

Sujets de baccalauréat

25 Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes C_f et C_g des fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\ln x \text{ et } g(x)=\ln^2 x.$$

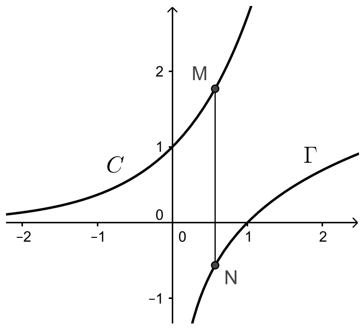


1. Étudier la position relative des deux courbes.
2. Pour $\in]0;+\infty[$, M et N sont des points de C_f et C_g de même abscisse x.
   a. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=f(x)-g(x)$.
   b. Sur l'intervalle $[1;e]$, pour quelle valeur de x la distance MN est-elle maximale ? En déduire la valeur maximale de MN.
   c. Démontrer que sur $]0;1[\cup]e;+\infty[$ il existe deux nombres a et b $(a<b)$ pour lesquels la distance MN est égale à 1. Précisez les valeurs de a et b à 10^{-1} près.

26 *(2008, Amérique du Nord).* Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$. On nomme C la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y=\ln x$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$.
   b. Préciser les positions relatives de C et de Γ.
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe C passant par le point O.
   a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$. Démontrer que la tangente T_a à C au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a)-af'(a)=0$.
   b. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par
   $$g(x)=f(x)-xf'(x).$$
   Montrer que sur $]1;+\infty[$, les équations $g(x)=0$ et $\ln^3 x-\ln^2 x-\ln x-1=0$ ont les mêmes solutions.
   c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t)=t^3-t^2-t-1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.
   d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe C passant par le point O.

27 *(2011, Antilles-Guyane).*



1. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par
   $$f(x)=xe^x-1.$$
   a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.
   b. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2. On note C la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé.
   Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de C d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x.
   On rappelle[1] que pour tout réel x strictement positif, $e^x>\ln x$.
   a. Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x=\alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.
   b. En utilisant la question **1.**, montrer que $e^\alpha=\frac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à C au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

28 *(2013, Amérique du Nord).* On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=\sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant.

```
u ← 1
Pour i variant de 1 à n
  u ← √(2u)
Fin Pour
Renvoyer u
```

   a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat affiché par cet algorithme lorsque n vaut 3.
   b. Que permet de calculer cet algorithme ?

[1] Le démontrer.

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
valeur	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n \leq 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. Recopier l'algorithme ci-contre et le compléter de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que

$$u_n > 1{,}999.$$

```
n ← 0
u ← 1
```

29 *(2015, Nouvelle-Calédonie).* Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.

2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

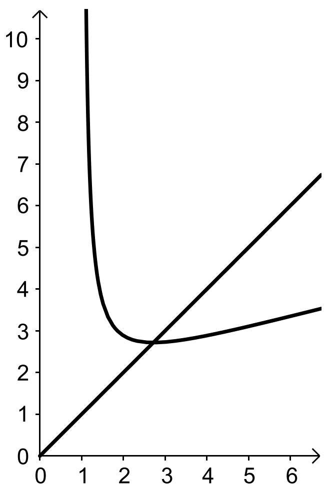
30 *(2012, Antilles-Guyane).*

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

On a tracé ci-contre dans un repère orthogonal la courbe C représentative de la fonction f ainsi que la droite D d'équation

$$y = x.$$



1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

3. En déduire que si $x > e$ alors $f(x) > e$.

Partie B – Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Sur le graphique, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.

Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > e$.

b. Déterminer les variations de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer sa limite ℓ.

3. On donne l'algorithme suivant.

```
X ← 5
Y ← 0
Tant que X > 2,72
    X ← X / ln X
    Y ← Y + 1
Fin Tant que
Renvoyer u
```

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3

n	3	4	5
u_n	2,718 372 634 6	2,718 281 830 0	2,718 281 828 5

31 *(2016, métropole).*

Partie A – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0;1]$, $f(x)$ appartient à $[0;1]$.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
Tant que N − ln(N² + 1) < A
    N ← N + 1
Fin Tant que
Renvoyer N
```

a. Que fait cet algorithme?

b. Déterminer la fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0;1]$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

32 *(2018, métropole).* Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.

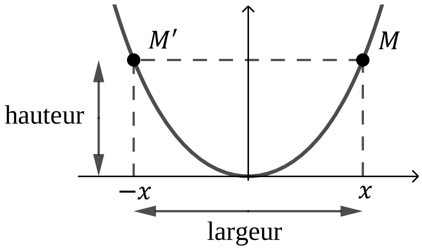
On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.
On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation
$$(E) : e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0.$$
2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :
$$f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2.$$
   a. Vérifier que pour tout $x > 0$,
$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2.$$
   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Calculer $f'(x)$.
   b. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à
$$(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0.$$
   c. En posant $X = e^x$, montrer que l'équation
$$f'(x) = 0$$
   admet pour unique solution réelle $\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$.
4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f'.

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

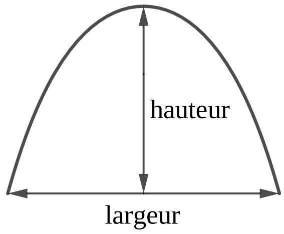
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α.
5. On considère l'algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

```
Tant que b − a > 0,1 faire :
    m ← (a+b)/2
    Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0, alors :
        b ← m
    Sinon :
        a ← m
    Fin Si
Fin Tant que
```

   a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.
   Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   On justifiera la réponse en complétant le tableau ci-dessous avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5	...	...	...
...			

   b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?
6. La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre.
Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :
$$(E') : e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$
Donner un encadrement de la hauteur de la Gateway Arch.

33 *(2014, Nouvelle-Calédonie).* Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit a un nombre réel strictement positif.
On note Δ_a la droite d'équation $y = ax$ et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection de Γ et Δ_a suivant les valeurs de a.
Pour cela, on considère la fonction f_a définie pour tout nombre réel x par $f_a(x) = e^x - ax$.
On admet pour tout réel a que la fonction f_a est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. **Étude du cas particulier $a = 2$**
La fonction f_2 est donc définie $f_2(x) = e^x - 2x$.
   a. Étudier les variations de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition).
   b. En déduire que Γ et Δ_2 n'ont pas de point d'intersection.
2. **Étude du cas général où a est un réel strictement positif**
   a. Déterminer les limites de f_a en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Étudier les variations de f_a sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_a est $a - a\ln a$.
   c. Étudier le signe de $a - a\ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif a.
   d. Déterminer selon les valeurs du réel a le nombre de points communs à Γ et Δ_a.

34 *(2014, Antilles-Guyane).* On considère l'équation $(E_1) : e^x - x^n = 0$ où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.
1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation $(E_2) : \ln(x) - \frac{x}{n} = 0$.
2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

35 Montrer que la suite définie par
$$u_n = \frac{\ln n}{n} \text{ pour } n \geq 1$$
est décroissante à partir du rang 3.

36 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^3\left(\ln x - \frac{5}{6}\right).$$

1. Tracer la courbe de f sur la calculatrice et émettre une conjecture sur les variations de f ainsi que sa convexité.
2. Utiliser l'impression d'écran du logiciel de calcul formel ci-dessous pour démontrer ou préciser les conjectures.

factoriser(deriver(x^3(ln(x)-5/6))) $\frac{3x^2(2\ln x - 1)}{2}$
deriver(3x^2(2*ln(x)-1)/2) $6x\ln x$

3. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'inflexion.

37 Pour l'achat de sa voiture d'occasion, Clémence se connecte à un site internet bien connu de crédit.
Elle souhaite emprunter 8000 € sur 24 mois. Le site lui propose un taux débiteur de 3,25 % par an.
Elle souhaite vérifier le montant de la mensualité annoncée (344,74 €) ainsi le coût total du crédit (273,76 €) qui est la somme des intérêts versés chaque mois (les frais de dossier sont offerts).

(copie d'écran du site www.cetelem.fr)

On appelle C le capital emprunté, t le taux mensuel (le taux annuel divisé par 12), M le montant d'une mensualité et N la durée du crédit, en mois.
On a donc dans ici
$$C = 8000,\ t = \frac{0{,}0325}{12},\ M = 344{,}74 \text{ et } N = 24.$$
Par convention, on appelle « mois 0 » le moment où Clémence a reçu les 8000 € de l'organisme prêteur. À cet instant-là, elle a remboursé 0 €, et le capital restant dû est 8000 €.

- Le mois 1, elle doit des intérêts à l'organisme pour les 8000 € prêtés, d'un montent de $tC \approx 21{,}67$ €. Comme sa mensualité est de 344,74 €, elle peut donc rembourser $344{,}74 - 21{,}67 = 323{,}07$ € du capital emprunté. Elle doit dorénavant $8000 - 323{,}07 = 7676{,}93$ €, c'est le nouveau capital restant dû.
- Le mois 2, le même calcul se répète, avec 7676,93 au lieu de 8000.
- …

1. Dans cette question, nous allons créer le « tableau d'amortissement » du prêt qui est obligatoirement fourni par l'organisme prêteur.
Recopier la feuille de calcul ci-dessous (uniquement ce qui n'est pas en italique) et donner les formules saisies dans les cases B5, C5, D5 qui, étendues vers le bas, permettront de remplir le tableau d'amortissement.
Comment voit-on que le prêt est bien remboursé à l'issue des 24 mois ?
Quelle est le coût du crédit ?

	A	B	C	D
1	taux annuel :	0,0325	mensualité :	344,74
2				
3	mois	capital remboursé	intérêts du mois	capital restant dû
4	0	0	0	8000
5	1	*323,07*	*21,67*	*7676,93*
6	2	*323,95*	*20,79*	*7352,98*
7	3	*324,83*	*19,91*	*7028,15*
8	...	...	...	...

2. Soit C_n le capital restant dû au bout la n^e échéance (c'est-à-dire après remboursement de la mensualité du n^e mois).
Dans cette question, les calculs seront effectués avec C, t, M et N et non leur valeur numérique prise en exemple.
   a. Que vaut C_0 ?
   b. Prouver que $C_{n+1} = (1+t)C_n - M$.
   On pose $u_n = C_n - \frac{M}{t}$.
   c. Montrer que la suite u_n est géométrique de raison $1+t$. Donner son premier terme.
   d. En déduire que pour tout entier n, on a
   $$C_n = (1+t)^n\left(C - \frac{M}{t}\right) + \frac{M}{t}.$$
   e. Justifier qu'on a l'égalité
   $$(1+t)^N\left(C - \frac{M}{t}\right) = -\frac{M}{t}$$
   et en déduire que
   $$M = \frac{tC}{1-(1+t)^{-N}}.$$
3. Utiliser la formule ci-dessus pour donner la mensualité de Clémence avec 3 chiffres après la virgule.
Reporter la modification dans la feuille de calcul de la question **1.** et constater qu'à présent, le capital restant dû est bien 0 € le 24^e mois (et non $-0{,}12$ €).
4. Dans cette question, on se donne le capital C, le taux t et le montant de la mensualité M que l'on ne souhaite pas dépasser.
   a. Montrer que le crédit et remboursable si et seulement si $tC < M$.
   b. Démontrer dans ce cas là que la durée du crédit N est le plus petit entier n vérifiant
   $$n \geq -\frac{\ln\left(1 - \frac{C}{M}t\right)}{\ln(1+t)}.$$
   c. Clémence craque sur une Mini Cooper à 13000 € et son budget ne lui permet pas de dépenser plus de 450 € par mois dans le remboursement de son crédit.
   Calculer la durée du crédit et la mensualité au centime près (le taux annuel reste de 3,25 %).