# Équations différentielles

## 1. Primitives d'une fonction continue

### ❖ Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

**Définition.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On appelle primitive de $f$ sur $I$ toute fonction $F$ dérivable sur $I$ dont la dérivée est $f$. Ainsi $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

**Exemple**

- La fonction $F: x \mapsto x^2$ est une primitive de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$ car $F'(x) = 2x$.
- La fonction $F: x \mapsto \frac{1}{2}\ln(2x+1)$ est une primitive de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{2x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$. En effet $F$ est définie et dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et
$$F'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x+1} = \frac{1}{2x+1}.$$

**Théorème 1.** Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet une primitive sur $I$.

**Théorème 2.** Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle $I$ différent d'une constante.
Autrement dit, si $F$ est une primitive d'une fonction $f$ continue sur un intervalle $I$, toutes les autres primitives de $f$ sur $I$ sont définies par $x \mapsto F(x) + C$ où $C$ est un réel quelconque.

**Démonstration.** Considérons une fonction $f$ continue sur $I$ et soit $F$ l'une de ses primitives sur $I$. Il est clair que la fonction $G$ définie sur $I$ par
$$G(x) = F(x) + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$
est une primitive de $f$ sur $I$ car on a clairement $G'(x) = F'(x) = f(x)$
Réciproquement, soit $G$ une primitive de $f$ sur $I$. Alors la fonction $G - F$ est dérivable sur $I$ et $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$, d'où il résulte que la fonction $F - G$ est constante sur $I$. Il existe donc un réel $k$ tel que $G - F = C$, ou encore $G = F + C$. ■

**Exemple**

Les primitives de la fonction $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 + C$ où $C$ est un réel quelconque.

**Proposition 3.** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. On se donne un réel $x_0 \in I$ et un réel quelconque $y_0$.
Il existe une unique primitive $F$ de $f$ vérifiant la condition initiale $F(x_0) = y_0$ (ou encore « qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$ »).

**Démonstration.** La fonction $f$ est continue sur $I$, donc admet des primitives ; soit $G$ l'une d'elles. Toute primitive de $f$ est de la forme $F(x) = G(x) + C$ où $k$ est un réel.
La condition $F(x_0) = y_0$ donne
$$F(x_0) = y_0 \Leftrightarrow G(x_0) + C = y_0 \Leftrightarrow C = y_0 - G(x_0).$$
Ainsi il existe une seule primitive $F$ de $f$ prenant la valeur $y_0$ en $x_0$, c'est la fonction
$$F: x \mapsto G(x) - G(x_0) + C. \ ■$$

**Exemple**

Cherchons la primitive $F$ de $f: x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(3) = 0$.
La fonction $f: x \mapsto 2x$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions $F: x \mapsto x^2 + C$, où $C$ est un réel quelconque.
La condition $F(3) = 0$ donne $F(3) = 0 \Leftrightarrow 3^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -9$, la primitive cherchée est donc $F: x \mapsto x^2 - 9$.

❖ **Calcul de primitives**

Par lecture inversée du tableau des dérivées, on obtient le tableau ci-dessous.

| **Fonction** | **Une primitive** | **Intervalle de validité** |
|---|---|---|
| $x \mapsto a$, $a \in \mathbb{R}$ | $x \mapsto ax$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n$, $n$ entier, $n \geq 1$ | $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n$, $n$ entier, $n \leq -2$ | $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ | $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ | $x \mapsto -\frac{1}{x}$ | $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $x \mapsto \ln x$ | $]0; +\infty[$ |
| $x \mapsto e^x$ | $x \mapsto e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $x \mapsto 2\sqrt{x}$ | $]0; +\infty[$ |

**Exemple**

Soit $f: x \mapsto \frac{1}{x^3}$ définie sur l'intervalle $]-\infty; 0[$. En écrivant que $f(x) = x^{-3}$, le tableau ci-dessous donne une primitive de $f$, à savoir la fonction $F$ définie par

$$F(x) = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} = -\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}.$$

**Proposition 4.**
- Si $F$ et $G$ sont des primitives des fonctions $f$ et $g$, alors $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$.
- Si $F$ est une primitive d'une fonction $f$ et si $\lambda$ est un réel, alors $\lambda F$ est une primitive de la fonction $\lambda f$.

**Démonstration.** C'est évident car $(F + G)' = F' + G' = f + g$ et $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$. ■

**Exemple**

- Soit la fonction $f: x \mapsto e^x + 5x^3$, définie sur $\mathbb{R}$.
  Une primitive de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$ et une primitive de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto \frac{x^4}{4}$, donc une primitive de $x \mapsto 5x^3$ est $x \mapsto 5 \times \frac{x^4}{4} = \frac{5}{4}x^4$.
  Finalement une primitive de $f$ est $F: x \mapsto e^x + \frac{5}{4}x^4$.
- Certaines fonctions admettent des primitives qu'il est difficile de déterminer. Un logiciel de calcul formel peut y aider.
  Par exemple la copie d'écran ci-contre d'un logiciel de calcul formel nous apprend qu'une primitive de $f: x \mapsto xe^x$ est $F: x \mapsto (x-1)e^x$.
  La vérification est immédiate en dérivant :
  $$F'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = (1 + x - 1)e^x = xe^x = f(x).$$

```
integrer(x*e^x,x)
                (x − 1)e^x
```

**Proposition 5.** Soit $v$ une fonction dérivable sur un intervalle $J$ et $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ telle que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$. Alors $u \circ v$ est une primitive de $v' \times (u' \circ v)$.

Les cas fréquemment rencontrés seront

$$u'e^u = (e^u)' \ ; \ \frac{u'}{u^2} = \left(-\frac{1}{u}\right)' \ ; \ \frac{u'}{u} = (\ln u)' \ ; \ \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \left(\sqrt{u}\right)' \ ; (u^n)' = nu'u^{n-1}.$$

**Exemple**

- Une primitive de la fonction $x \mapsto 2xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto e^{x^2}$.
- Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{3x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{3}{2}\ln(x^2+1)$.
- Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^2}$. On peut écrire
$$f(x) = -3 \times \frac{1}{2} \times \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{3}{2} \times \frac{-u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}$$
où l'on a posé $u(x) = x^2 + 1$. Ainsi une primitive de $f$ est $F: x \mapsto -\frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2+1}$.

## 2. Équations différentielles

### ❖ Généralités sur les équations différentielles

**Définition.** *Une <u>équation différentielle</u> est une équation dont l'inconnue, souvent notée $y$, est une fonction. Elle se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction inconnue, certaines de ses dérivées et éventuellement la variable, notées souvent $x$ ou $t$.*
*L'<u>ordre</u> d'une équation différentielle est le plus grand ordre de la dérivée de la fonction inconnue dans l'équation.*

**Exemple**

- La fonction $f: x \mapsto x^2 - x + 7$ est une solution de l'équation différentielle du premier ordre $y' = 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$. En effet $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 1$.
- Si $f$ est une fonction continue sur un intervalle $I$, les solutions de l'équation différentielle $y' = f$ sur $I$ sont les primitives de $f$ sur $I$.
- Les fonctions de la forme $f: x \mapsto Ce^{2x} + 3$, où $C$ est un réel quelconque, sont des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle du premier ordre $y' = 2y - 6$. En effet, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2Ce^{2x}$. De plus
$$2f(x) - 6 = 2(Ce^{2x} + 3) - 6 = 2Ce^{2x} + 6 - 6 = 2Ce^{2x}.$$
On a donc bien l'égalité $f'(x) = 2f(x) - 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f: x \mapsto 4x^2$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle du second ordre $x^2y'' - 2y = 0$. En effet $f''(x) = 8$ et
$$x^2 \times f''(x) - 2f(x) = x^2 \times 8 - 2 \times 4x^2 = 0.$$

### ❖ Équations différentielle $\boldsymbol{y' = ay}$

**Définition.** *Soit $a$ un réel. L'équation différentielle $y' = ay$ $(\boldsymbol{E_0})$ est appelée équation différentielle <u>linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants</u>.*
*À la place de « homogène », on peut utiliser « sans second membre ».*

**Théorème 6.** Soit $a$ un réel.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ $(\boldsymbol{E_0})$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où $C$ est un réel quelconque.

**Démonstration.** Soit $f$ une solution (éventuelle) de $(E_0)$. Considérons la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{-ax}$. La fonction $g$ est dérivable et

$$g'(x) = f'(x)e^{-ax} + f(x) \times (-ae^{-ax}) = \big(f'(x) - af(x)\big)e^{-ax}.$$

Mais comme $f$ vérifie $(E_0)$, on a $f'(x) = af(x)$, d'où $g'(x) = 0$. Cela montre que la fonction $g$ est constante sur $\mathbb{R}$, il existe un réel $C$ tel que $g(x) = C$, soit $f(x)e^{-ax} = C$, d'où $f(x) = Ce^{ax}$.
Réciproquement, il est clair que les fonctions de la forme $f : x \mapsto Ce^{ax}$ définies sur $\mathbb{R}$ conviennent puisque $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$. ■

**Définition.** *La courbe représentative dans un repère d'une solution d'une équation différentielle s'appelle une <u>courbe intégrale</u> de l'équation différentielle.*

**Proposition 7.** Soit $a$, $x_0$ et $y_0$ trois réels.
L'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Cela signifie que par un point $M(x_0; y_0)$ quelconque du plan, il ne passe qu'une et une seule courbe intégrale de l'équation différentielle $y' = ay$ . En particulier deux courbes intégrales ne se coupent pas.

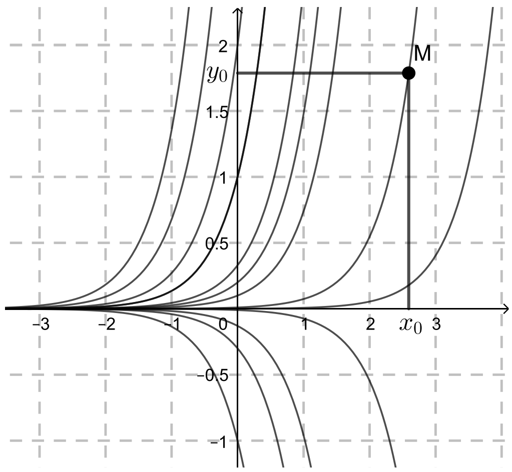
**Démonstration.** On résout : $Ce^{ax_0} = y_0 \Leftrightarrow C = y_0e^{-ax_0}$. Ainsi l'unique solution $y$ de $(E_0)$ telle que $y(x_0) = y_0$ est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = Ce^{ax} = y_0e^{-ax_0}e^{ax} = y_0e^{a(x-x_0)}.\ ■$$

**<u>Exemple</u>**

L'équation différentielle $y' = 2y$ admet comme solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{2x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Celle des solutions qui vérifie la condition initiale $y(3) = -4$ est $x \mapsto -4e^{2(x-3)}$.




❖ **Équations différentielle $\boldsymbol{y' = ay + f}$**

**Théorème 8 (principe de superposition).** Soit $a$ un réel et $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
Considérons l'équation différentielle $y' = ay + f$ $(\boldsymbol{E})$ et supposons que $y_0$ soit une solution particulière de $(E)$.
Les solutions de $(E)$ sur $I$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} + y_0$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, les solutions de $y' = ay + f$ sont les solutions de l'équation homogène associée $y' = ay$ ajoutées à une solution particulière de l'équation complète.

**Démonstration.** On a $y_0' = ay_0 + f$, d'où $y_0' - ay_0 = f$.
Ainsi, $y$ est une solution de $(E)$ si et seulement si

$$y' = ay + f \Leftrightarrow y' - ay = f \Leftrightarrow y' - ay = y_0' - ay_0 \Leftrightarrow y' - y_0' = ay - ay_0$$
$$\Leftrightarrow y' - y_0' = a(y - y_0) \Leftrightarrow (y - y_0)' = a(y - y_0).$$

Cela montre que $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $y - y_0$ est solution $(E_0)$, donc, d'après le théorème 6, si et seulement s'il existe $C$ tel que pour tout $x \in I$ on ait

$$(y - y_0)(x) = Ce^{ax}, \text{ ou encore } y(x) = Ce^{ax} + y_0(x).$$

Les solutions de $(E)$ sont donc les fonctions définies sur $I$ par $x \mapsto Ce^{ax} + y_0$, où $C \in \mathbb{R}$. ■

**Exemple**

Considérons l'équation $y' = 2y - 4x^2$ $(\boldsymbol{E})$. Les solutions de l'équation homogène associée $y' = 2y$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{2x}$. Il reste à déterminer une solution particulière. Vu que $4x^2$ est un polynôme du second degré, on va chercher une solution particulière $y_0$ sous forme d'un polynôme du second degré, c'est-à-dire

$$y_0(x) = ax^2 + bx + c.$$

Alors

$$y_0' = 2y_0 - 4x^2 \Leftrightarrow 2ax + b = 2(ax^2 + bx + c) - 4x^2$$
$$\Leftrightarrow 2ax + b = (2a - 4)x^2 + 2bx + 2c$$

L'égalité de deux polynômes a lieu si et seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\begin{cases} 2a - 4 = 0 \\ 2b = 2a \\ 2c = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = a \\ c = \frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ainsi la fonction $y_0 : x \mapsto 2x^2 + 2x + 1$ est solution de $(E)$, donc les solutions de $(E)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{2x} + 2x^2 + 2x + 1$, où $C \in \mathbb{R}$.

**Corollaire 9.** Soit $a$ et $b$ deux réels, avec $a \neq 0$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ $(\boldsymbol{E})$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C$ est un réel quelconque.

**Démonstration.** En application du théorème précédent, il nous faut chercher une solution particulière de l'équation $y' = ay + b$. Tentons notre chance avec une fonction constante sur $\mathbb{R}$, $y_0 : x \mapsto k$, où $k \in \mathbb{R}$. La fonction $y_0$ vérifie l'équation si et seulement si

$$y_0' = ay_0 + b \Leftrightarrow 0 = ak + b \Leftrightarrow k = -\frac{b}{a},$$

d'où le résultat. ■

**Exemple**

L'équation différentielle $y' = 3y - 7$ a pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{3x} + \frac{7}{3}$.