Équations différentielles – Exercices

Primitives d'une fonction continue

1 Vrai ou faux ? Justifier.

a. La fonction $F : x \mapsto 2x^2 - x + 7$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction $F : x \mapsto 2x^2 - x$ est la primitive de la fonction $f : x \mapsto 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction $F : x \mapsto -\frac{1}{4} \times \frac{1}{(2x-3)^2}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(2x-3)^3}$ sur $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$.

d. La fonction $F : x \mapsto \ln(-x)$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0[$.

e. La fonction $F : x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2(x-1)}$ sur $]0; 1[$.

2 Dans chacun des cas suivants, démontrer que F est une primitive de f.

a. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ $\quad F(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

b. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{x}$ $\quad F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^4}{4} + \ln x$

c. $f(x) = (x-1)e^x$ $\quad F(x) = (x-2)e^x$

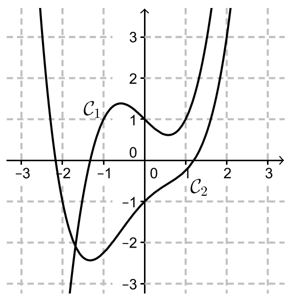
d. $f(x) = xe^{-x^2}$ $\quad F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

e. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ $\quad F(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

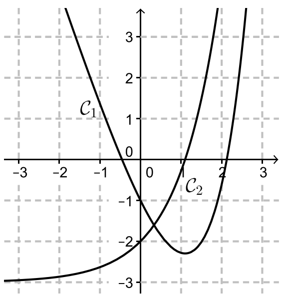
3 Vérifier que les fonctions F_1 et F_2 définies sur $]0; +\infty[$ par $F_1(x) = \ln(x)$ et $F_2(x) = \ln(3x)$ sont des primitives de la fonction inverse.
Mettre en évidence le réel k tel que $F_2(x) = F_1(x) + k$.

4 Dans chaque cas, on a représenté une fonction f et l'une de ses primitives F. Retrouver la courbe de f.

a.



b.



5 On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x \ln x$ pour $x \in]0; 1]$ et $f(0) = 0$.

1. Justifier que f est continue sur $[0; 1]$.

2. Montrer que la fonction F définie sur $[0; 1]$ par
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \text{ si } x \in]0; 1] \text{ et } F(0) = 0$$
est une primitive de f sur $[0; 1]$.

Calcul de primitives

6 Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

a. $f(x) = 2x + 5$ **b.** $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c. $f(x) = x^2 - \frac{1}{5}x$ **d.** $f(x) = \frac{2}{5} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

e. $f(x) = -x^3 + \frac{3}{5}x^2 - 2$ **f.** $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$

g. $f(x) = \frac{1}{4x}$ **h.** $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

i. $f(x) = \frac{3}{2x} - \frac{4}{3x^2}$ **j.** $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

k. $f(x) = e^x + x$ **l.** $f(x) = e^{-x}$

m. $f(x) = 3e^{3x} + 1$ **n.** $f(x) = 2x^2 e^{x^3}$

o. $f(x) = \cos(2x)$ **p.** $f(x) = \frac{1}{4}\sin(2x + 1)$

q. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ **r.** $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$

s. $f(x) = \frac{x^2}{x^3+2}$ **t.** $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

u. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ **v.** $f(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x^2+1}}$

w. $f(x) = x(x^2+1)^3$ **x.** $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$

7 Déterminer la primitive des fonctions suivantes qui prend la valeur 1 en 0.

a. $f(x) = 2x + 4$ **b.** $f(x) = 1 - x^2$

c. $f(x) = e^{-x} - x^2$ **d.** $f(x) = \sin x \cos^2 x$

e. $f(x) = \frac{2}{x+2} - 1$ **f.** $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

8 Soit f définie sur $D =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in D$,
$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2. En déduire une primitive F de f sur $]0; +\infty[$.

3. Donner une primitive de f sur $]-1; 0[$

Équations différentielles – Généralités

9 Vrai ou faux ? Justifier.

a. La solution de l'équation différentielle $y' = 7$ sur $\mathbb{R}$ est $f : x \mapsto 7x$.

b. Pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto (x^2 + C)e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = y + 2xe^x$.

c. Pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto Ce^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = y + x$

d. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle $y'' + y^2 = 0$.

e. La fonction $f : x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

10 Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles I indiqués, avec éventuellement la condition initiale donnée.

a. $y' = 5$, $I = \mathbb{R}$.

b. $y' = -4$, $y(1) = 5$, $I = \mathbb{R}$.

c. $y' = x^3 - x$, $y(0) = 1$, $I = \mathbb{R}$.

d. $y' = \frac{1}{\sqrt{8+x}}$, $y(1) = 1$, $I =]-8; +\infty[$.

e. $y' = \frac{1}{x-1}$, $y(3) = 1$, $I =]1; +\infty[$.

f. $y' = \frac{1}{x-1}$, $y(0) = 0$, $I =]-\infty; 1[$.

11 Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{1 + x^2}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0.$$

12 Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \lambda x^2 \ln x + \mu x^2 + x^3$ sont des solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle
$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^3,$$
λ et μ désignant deux réels quelconques.

Équations différentielles $y' = ay$

13 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a. $y' = -7y$
b. $y' = y$
c. $7y - 3y' = 0$
d. $y' = -y$ et $y(0) = 2$
e. $y' = 3y$ et $y(-1) = 1$
f. $y' = 3y$ et $y(21) = 0$

13 bis Même consigne.

a. $y' = 5y$
b. $2y' + y = 0$
c. $y' = y$ et $y(3) = 4$
d. $y' = -y$ et $y(3) = 4$

Équations différentielles $y' = ay + b$

14 Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

a. $y' = -3y$
b. $y' + 2y = 1$
c. $4y' - 7y = 3$
d. $y' - 5 = y$

14 bis Même consigne.

a. $y' - 2y = -1$
b. $3y' + 2y = 7$
c. $5y' + 7y = 1$

15 Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

a. $4y' = 2y + 1$, $y(0) = 1$
b. $1 - y' = 2y$ et $y(1) = 3$
c. $\frac{2}{3}y' = y$ et $y(0) = 0$

15 bis Même consigne.

a. $7 + y = 3y'$, $y(1) = 0$
b. $5 - 2y' = y$ et $y(1) = 3$
c. $\frac{5}{7}y' = y + 1$ et $y(0) = 0$

16 On considère l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$
$$y' - 2y = -2x^2 - 4x + 3.$$
1. Résoudre l'équation homogène associée (E_0) :
$$y' - 2y = 0.$$
2. Montrer que $y_0 : x \mapsto x^2 + 3x$ est une solution de (E).
3. En déduire les solutions de (E).

17 On considère l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$
$$y' + y = 3e^{-x}.$$
1. Résoudre l'équation homogène associée (E_0) :
$$y' + y = 0.$$
2. Montrer que $y_0 : x \mapsto 3xe^{-x}$ est une solution de (E).
3. En déduire les solutions de (E).

18 On considère l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$
$$3y' - y = xe^x.$$
1. Résoudre l'équation homogène associée (E_0) :
$$3y' - y = 0.$$
2. Montrer que $y_0 : x \mapsto \frac{1}{4}(2x - 3)e^x$ est une solution de (E).
3. Démontrer que y est solution de (E) si et seulement si $y - y_0$ est solution de (E_0).
En déduire les solutions de (E).

19 On considère l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$
$$y'' + y' = 3x.$$
1. Résoudre l'équation $y' + y = 3x$.
2. En déduire les solutions de (E).

20 On considère l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$
$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x + 1).$$
1. Résoudre l'équation homogène associée (E_0) :
$$2y' + y = 0.$$
2. Chercher une solution f de (E) sous la forme
$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$$
où m et p sont deux réels.
3. En déduire les solutions de (E).

Problèmes, autres équations différentielles

21 **(Équations différentielles d'ordre 2).**
On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$
$$y'' + by' + cy = 0\ (\boldsymbol{E}).$$
où b et c sont deux réels.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est une solution de (E) si et seulement si k est solution de l'équation, appelée **équation caractéristique** de (E).
$$x^2 + bx + c = 0.$$

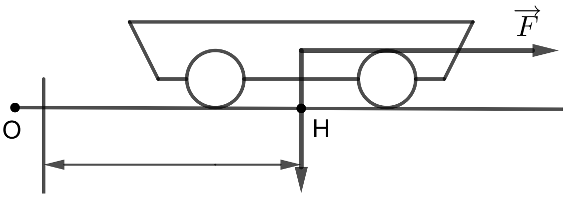
On suppose dans toute la suite que $b^2 - 4c \geq 0$ et on note α_1 et α_2 les solutions de l'équation caractéristique (avec éventuellement $\alpha_1 = \alpha_2$).

2. Montrer que $\alpha_1 + \alpha_2 = -b$ et $\alpha_1\alpha_2 = c$.
3. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
  a. Montrer que $z = y' - \alpha_1 y$ est solution de l'équation différentielle $z' - \alpha_2 z = 0$.
  b. En déduire qu'il existe une constante C telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - \alpha_1 y(x) = Ce^{\alpha_2 x}.$$
4. On suppose $\alpha_1 \neq \alpha_2$.
  a. Chercher une solution particulière de l'équation $y' - \alpha_1 y = Ce^{\alpha_2 x}$ de la forme $x \mapsto Be^{\alpha_2 x}$, $K \in \mathbb{R}$.
  b. En déduire qu'il existe deux réels A et B tels que
$$y(x) = Ae^{\alpha_1 x} + Be^{\alpha_2 x}$$
  et vérifier que les fonctions de cette forme sont des solutions de (E).
5. On suppose $\alpha_1 = \alpha_2$, et l'on note $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$.
  a. Chercher une solution particulière de l'équation $y' - \alpha y = Ce^{\alpha x}$ sous la forme $x \mapsto Kxe^{\alpha x}$, $K \in \mathbb{R}$.
  b. En déduire qu'il existe deux réels A et B tels que
$$y(x) = (Ax + B)e^{\alpha x}$$
  et vérifier que les fonctions de cette forme sont des solutions de (E).
6. Énoncer le théorème obtenu.
7. Résoudre les équations suivantes.
  a. $y'' - y' - 2y = 0$, $y(1) = 1$ et $y'(0) = 1$.
  b. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.

22 La vitesse de chute verticale v (en m·s^{-1}) d'un objet de m (en kg) vérifie l'équation $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\gamma}{m}v$ où $g = 9{,}8$ m·s^{-2} est la norme du champ de pesanteur, $\gamma = 1{,}96$ kg·s^{-1} le coefficient de frottement et t le temps écoulé (en s) depuis le début de la chute.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par v sous la forme $y' = ay + b$ et résoudre cette équation différentielle.
2. Quel est le comportement de v lorsque t tend vers $+\infty$? Interpréter.

23 *(2004, métropole).* Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m^{-1}.s.



La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0;+\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$(E) : 25x' + 200x'' = 50.$$

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle $(F) :\ v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.
   Résoudre l'équation différentielle (F).
2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
   - **a.** Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.
   - **b.** En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-\frac{t}{8}}$.
3. Calculer $V = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite V ?
4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

24 Une colonie de 2000 bactéries est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence. On admet que l'évolution en fonction du temps t (en heures) du nombre d'individus N de cette colonie est solution de l'équation différentielle

$$N' = 3N - 0{,}005N^2 \ \ (\boldsymbol{E}).$$

On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$ et on définit sur cet intervalle la fonction g par $g = \frac{1}{N}$.

1. Montrer que N est solution de (E) si et seulement si g est solution de $y' = -3y + 0{,}005\ \ (\boldsymbol{E'})$.
2. Résoudre (E') puis (E).
3. Déterminer le nombre de bactéries présentes au bout de deux heures.

25 On se propose de déterminer les fonctions dérivables f sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y, on ait

$$f(x+y) = f(x)f(y)\ \ (*).$$

1. Montrer que si f vérifie $(*)$, f est solution de l'équation différentielle $y' = f'(0)y$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = f'(0)y$.
3. Montrer que si f vérifie $(*)$, alors $f(0) \in \{0; 1\}$.
4. En déduire les fonctions vérifiant $(*)$.

26 L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie A – On considère l'équation différentielle

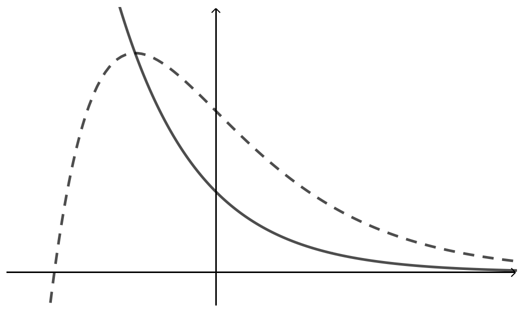
$$(E) : y' + y = e^{-x}.$$

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$.
   Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
   Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B – Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.
On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = (x+k)e^{-x}.$$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x}$.
On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction h.
On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}$ sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.



1. Sur le graphique, l'une des courbes est en traits pointillés, l'autre est en trait plein. Laquelle est la courbe $\mathcal{C}$?
2. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k et placer l'unité sur chacun des axes du graphique.