Combinatoire

1. Langages des ensembles

❖ Parties d'un d'ensemble

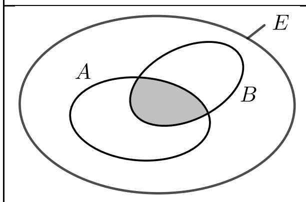
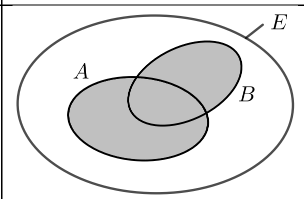
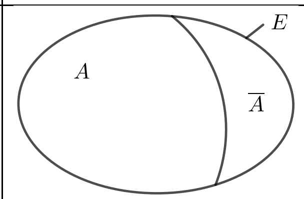
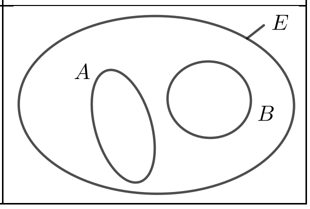
Définition. *Soit E un ensemble. Un sous-ensemble de E s'appelle également* <u>*partie*</u> *de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On a notamment $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.*

<u>Exemple</u>

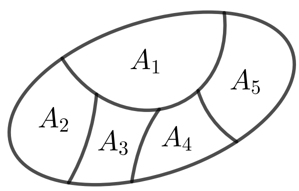
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset; \{a\}\}$.
- $\mathcal{P}(\{a; b\}) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$.

Définition. *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.*

- *L'*<u>*intersection*</u> *de A et B, notée $A \cap B$ est la partie de E définie par*
  $$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B).$$
  On dit que A et B sont <u>*disjoints*</u> *si $A \cap B = \emptyset$.*
- *La* <u>*réunion*</u> *de A et B, notée $A \cup B$ est la partie de E définie par*
  $$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B).$$
- *Le* <u>*complémentaire*</u> *de A dans E, noté $\bar{A}$, est la partie de E définie par*
  $$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$

intersection de A et B	réunion de A et B	complémentaire de A dans E	A et B sont disjoints
			

Définition. *Des parties A_1, A_2, ..., A_p d'un ensemble E constituent une* <u>*partition*</u> *de E si elles sont deux à deux disjointes (c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et si leur réunion est E.*



❖ Produit cartésien d'ensembles

Définition. *Étant donné deux ensembles E et F, on note $E \times F$ l'ensemble de tous les couples $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$. On l'appelle* <u>*produit cartésien*</u> *de E et F.*

<u>Exemple</u>

Soit $E = \{a; b\}$ et $F = \{1; 2; w\}$. Alors
$$E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (a; w); (b; 1); (b; 2); (b; w)\}.$$

Cette définition se généralisé à un nombre (fini) quelconque d'ensembles.

Définition. *Étant donné un nombre fini d'ensemble E_1, E_2, … E_n, on appelle* <u>*produit cartésien*</u> $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ *l'ensemble des* <u>*n-uplets*</u> $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *avec* $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, … $x_n \in E_n$.

Un 2-uplet, 3-uplet, 4-uplet s'appelle plus simplement couple, triplet, quadruplet.

Il ne faut pas confondre un n-uplet où l'ordre à une importance (par exemple $(1,2) \neq (2,1)$), et un ensemble où l'ordre n'a pas d'importance (par exemple $\{1; 2\} = \{2; 1\}$).

2. Cardinal

❖ Cardinal d'un ensemble fini

Définition. *Si un ensemble est fini et contient n éléments, ce nombre est appelée* <u>*cardinal*</u> *de E, et on note* $\mathrm{Card}(E) = n$. *On convient que* $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$.

Théorème. Si A et B sont deux parties finies d'un ensemble E, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont finis et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

En particulier, **si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont disjoints**, on obtient $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.

Plus généralement,

Théorème. Soit A_1, A_2, … A_n des ensembles deux à deux disjoints, c'est-à-dire vérifiant $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Alors

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \cdots \mathrm{Card}(A_n).$$

Concernant le produit cartésien, on a le résultat suivant.

Théorème. Étant donné des ensembles finis E_1, E_2, … E_n, on a

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times \ldots \times \mathrm{Card}(E_n).$$

Démonstration. Pour constituer un n-uplet $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, on a $\mathrm{Card}(E_1)$ choix possibles pour x_1, puis $\mathrm{Card}(E_2)$ choix possibles pour x_2, … puis $\mathrm{Card}(E_n)$ choix possibles pour x_n. ■

3. p-listes et arrangements

❖ p-liste d'un ensemble à n éléments

Définition. *On appelle* <u>*p-liste*</u> *d'un ensemble E, tout élément de $E^p = E \times \ldots \times E$, c'est-à-dire tout suite à p éléments de E.*

Dans une p-liste, les éléments peuvent donc être répétés.

Exemple

Soit $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

- $(3,2,2,5)$ est une 4-liste de E.
- $(1,3,2)$ et $(4,3,1)$ sont des 3-listes différentes de E.

Théorème. Il y a n^p p-listes d'un ensemble à n éléments.

Démonstration. C'est un cas particulier du précédent théorème : on a n choix possibles pour le 1e élément, n choix possibles pour le 2e, …, n choix possibles pour le p e, soit un total de $n \times n \times \ldots \times n = n^p$ choix. ∎

Exemple

Un test d'aptitude consiste à poser à chaque candidat une série de quatre questions auxquelles il doit répondre par « oui » ou « non ».
La réponse à un test est donc une 4-liste de l'ensemble {oui ; non}. Il y a 2^4 réponses possibles au test.

❖ p-liste d'éléments distincts

Définition. *Soit E un ensemble de cardinal n.*
Une p-liste d'éléments distincts de E est appelé <u>arrangement</u> de p éléments de E (on a donc $0 \leq p \leq n$). Un arrangement de n éléments de E est appelée <u>permutation</u> de E.

Théorème. Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1).$$

Exemple

On a écrit les 5 lettres du mot TABLE sur 5 cartes. Combien peut-on faire de « mots » de 3 lettres avec ces cartes ?
Cela revient à dénombrer le nombre d'arrangements de 3 éléments de l'ensemble E des 5 cartes. On a 5 choix pour la première carte, puis 4 pour la seconde, et enfin 3 pour la troisième, soit un total de $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Démonstration. On a n choix possibles pour le 1e élément, $n-1$ choix possibles pour le 2e, … , $n-(p-1) = n-p+1$ choix possibles pour le pe. ∎

Définition. *Soit n un entier naturel non nul. On appelle <u>factorielle n</u> le produit des entiers compris entre 1 et n, et on le note $n!$. On pose* $0! = 1$.

Ainsi on a $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, … On remarquera que, pour $n \geq 1$,

$$n! = 1 \times \ldots \times n = \big(1 \times \ldots \times (n-1)\big) \times n = (n-1)! \times n.$$

Du théorème précédent, on déduit celui-ci.

Théorème. Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de E est $n!$

Exemple

5 lycéens participent à une compétition sportive. En supposant qu'il n'y ait pas d'ex-æquo, le nombre de classements possibles est $5! = 120$.

4. Parties d'un ensemble et combinaisons

❖ Définitions et premières remarques

Définition. *Soit E un ensemble à n éléments, avec $n \geq 0$. Pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments de E. On parle aussi du nombre de <u>combinaisons</u> de k éléments de E. Ce nombre se lit « k parmi n » et s'appelle un <u>coefficient binomial</u>.*

Exemple

- Si $n = 0$, on a $E = \emptyset$, donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$, d'où $\binom{0}{0} = 1$.
- Si $n = 1$, on a $E = \{a\}$, donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}\}$, d'où $\binom{1}{0} = 1$ et $\binom{1}{1} = 1$.
- Si $n = 2$, on a $E = \{a; b\}$, donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$, d'où $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$ et $\binom{2}{2} = 1$.

Cas particuliers

- Il n'y a qu'un ensemble à 0 élément, l'ensemble vide, donc $\boxed{\binom{n}{0} = 1}$ pour tout $n \geq 1$.
- Étant donné un ensemble $E = \{x_1; \dots; x_n\}$ à n éléments, il y a n parties possédant un élément, à savoir $\{x_1\}$, … et $\{x_n\}$, donc $\boxed{\binom{n}{1} = n}$, pour tout $n \geq 1$.
- Il n'y a qu'un ensemble à n éléments, E lui-même. Donc $\boxed{\binom{n}{n} = 1}$ pour tout $n \geq 0$.

Exemple

Calculons $\binom{5}{3}$. Pour cela considérons un ensemble $E = \{a; b; c; d; e\}$ à 5 éléments. Pour constituer une partie de E à 3 éléments, choisissons un premier élément (5 choix), puis un second (4 choix) et un dernier (3 choix). Cela donne $5 \times 4 \times 3 = 60$ choix, c'est-à-dire le nombre de 3-listes de E. Mais nous avons compté $3! = 6$ fois chaque ensemble à 3 éléments de E. En effet, par exemple, l'ensemble $\{a; b; c\}$ peut être ordonné de 6 façons, le nombre de permutations d'un ensemble à 3 éléments. Finalement $\binom{5}{3} = \frac{60}{6} = 10$.
Ces 10 ensembles sont $\{a; b; c\}$, $\{a; b; d\}$, $\{a; b; e\}$, $\{a; c; d\}$, $\{a; c; e\}$, $\{a; d; e\}$, $\{b; c; d\}$, $\{b; c; e\}$, $\{b; d; e\}$ et $\{c; d; e\}$.

❖ Calcul des coefficients binomiaux

En généralisant l'exemple précédent, on obtient le théorème suivant.

Théorème. Soit k et n deux entiers avec $0 \leq k \leq n$. Alors
$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!}$$

Le numérateur est le nombre de k-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments et le dénominateur le nombre de permutations d'un ensemble à k éléments.

On peut donner une formule plus compacte que la précédente, utile dans les exercices théoriques, mais pas dans les calculs numériques.

Théorème. Soit k et n deux entiers avec $0 \leq k \leq n$. Alors
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Démonstration. Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur de la formule précédente par $(n-k)!$ en remarquant que
$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \times (n-k)! = n!$$
■

❖ **Propriétés des coefficients binomiaux**

Théorème (symétrie). Soit k et n deux entiers avec $0 \leq k \leq n$. Alors
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Démonstration. En effet, si A est une partie de E à k éléments, son complémentaire $\bar{A}$ est une partie à $n-k$ éléments de E. Réciproquement, si A est une partie à $n-k$ éléments, son complémentaire est une partie à $n-(n-k)=k$ éléments de A.
Il y a donc autant de partie à k éléments qu'à $n-k$ éléments, d'où la formule. ■

Théorème (formule de Pascal). Soit k et n deux entiers avec $1 \leq k \leq n-1$. Alors
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Démonstration. Soit E un ensemble à n éléments ($n \geq 2$) et a un élément fixé de E. Les parties à k éléments de E se décomposent en deux catégories disjointes.

- Celles qui contiennent a. Une fois a pris, il faut compléter par $k-1$ éléments pris parmi les $n-1$ éléments de E autre que a. Il y a donc $\binom{n-1}{k-1}$ telles parties.
- Celles qui ne contiennent pas a. Il faut donc choisir k parmi les $n-1$ éléments de E autres que a. Il y a donc $\binom{n-1}{k}$ telles parties.

Comme par ailleurs le nombre de partie à k éléments de E est $\binom{n}{k}$, le principe de la somme conduit à la formule annoncée. ■

❖ **Triangle de Pascal**

La formule de Pascal permet de calculer de proche en proche les coefficients binomiaux. On construit un tableau à double entrée, appelé triangle de Pascal, en plaçant les valeurs de k en colonnes et les valeurs de n en lignes. On initialise le tableau

- en remplissant la colonne $k = 0$ avec des 1 puisque $\binom{n}{0} = 1$ pour tout n ;
- en remplissant la diagonale avec des 1 puisque $\binom{n}{n} = 1$ pour tout n.

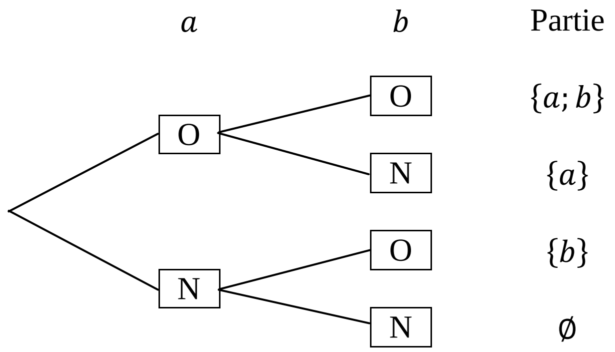
Ensuite la formule de Pascal permet de remplir le tableau ligne par ligne.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0	$\binom{0}{0}$				
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$			
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$		
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$	
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

❖ **Nombre de parties d'un ensemble à n éléments**



Soit $E = \{x_1; x_2; \dots x_n\}$ un ensemble à n éléments. Nous allons dénombrer de deux façons différentes le nombre de parties de E.

- Pour construire une partie de E, on peut procéder ainsi : on décrète si l'on prend x_1 (deux possibilités : « oui » ou « non »), puis on décrète si l'on prend x_2 (deux possibilités) et l'on procède de même jusqu'à x_n. Cela fait donc
$$2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$$
possibilités.
Autrement dit, il y a autant de parties d'un ensemble à n éléments que n-listes de l'ensemble {oui ; non}, soit 2^n d'après un théorème ci-dessus. On a illustré ci-contre la construction des parties d'un ensemble à 2 éléments.
- Une partie de E possède entre 0 et n éléments. Pour $0 \leq k \leq n$, le nombre de parties à k éléments de E est $\binom{n}{k}$, ce qui d'après le principe de la somme donne un total de parties égales à
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

On a donc démontré le théorème suivant.

Théorème. Pour tout entier $n \geq 0$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

5. Formule du binôme de Newton

Théorème. Pour tous réels a et b et tout entier $n \geq 0$, on a
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Exemple

La quatrième ligne du triangle de Pascal étant 1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1, on en déduit
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Démonstration. Lorsque l'on développe
$$(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \dots \times (a+b)$$
on obtient une somme de termes de la forme $a^j b^k$ où j et k représentent respectivement le nombre de fois qu'on a choisi a et b en développant.
On a forcément $j = n - k$, puisqu'à chaque fois qu'on ne choisit pas b, on choisit a. Enfin, comme il y a $\binom{n}{k}$ manières différentes de choisir k fois la valeur a parmi les n sions $x + y$ multipliées ci-dessus, $a^{n-k}b^k$ doit apparaître dans le développement avec le coefficient $\binom{n}{k}$. ■

Exemple

- Si l'on fait $a = b = 1$, on retrouve l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, pour $n \geq 0$.
- En prenant $a = -1$ et $b = 1$, il vient $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$, pour $n \geq 1$.

  Cette égalité peut se reformuler plus simplement, en séparent la somme en deux selon la parité de k :
  $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}.$$
  Comme cette somme est nulle, c'est que
  $$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}.$$
  Par exemple $\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = \binom{4}{1} + \binom{4}{3}$.
  On a donc démontré qu'un ensemble fini E non vide possède autant de parties ayant un cardinal pair que de parties ayant un cardinal impair.
  Si E est de cardinal impair, le résultat s'obtient facilement sans calcul : les parties de cardinal pair s'associe aux parties de cardinal impair grâce au complémentaire.
  Si E est de cardinal pair, c'est un peu plus délicat (voir exercices).