Combinatoire – Exercices

Utilisation du symbole Σ

1 Écrire sans le symbole Σ et simplifier.

- $S_1 = \sum_{k=2}^{4} k$
- $S_2 = \sum_{j=0}^{3} j^2$
- $S_3 = \sum_{k=1}^{5} 7$
- $S_4 = \sum_{k=4}^{6} 2j$
- $S_5 = \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \times j$

2 On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$ pour $n \geq 0$
Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4.

3 On pose $S(p,q) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^{q-k} \binom{q}{k} k^p$ où p et q sont des entiers naturels.
Calculer $S(0,0)$, $S(1,1)$, $S(5,2)$, $S(5,4)$, $S(5,5)$ et $S(5,6)$.

Langage des ensembles

4 Soit $E = \{a; b; c\}$ un ensemble à trois éléments. Écrire toutes les parties de E.

5 Montrer qu'un ensemble à 4 éléments possède autant de partie ayant un cardinal pair que de parties ayant un cardinal impair.

6 Soit $E = \{a; b\}$. Donner E^2 puis E^3.

7 Dans une classe, tous les élèves font au moins une option parmi latin ou grec. On sait qu'il y a 25 élèves faisant latin, 18 faisant grec et 10 faisant les deux.
Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

8 On considère un ensemble E à deux éléments. Calculer le cardinal de l'ensemble

$$\Gamma = \left\{(A\,;B) \in \left(\mathcal{P}(E)\right)^2 ;\ \mathrm{Card}(A \cap B) = 1\right\}.$$

Introduction à la combinatoire

9 Combien de « mots » de 3 lettres différents peut-on former avec les lettres A, B et C :

1. en utilisant au plus une fois chaque lettre ;
2. en utilisant autant de fois que l'on souhaite les lettres.

10 Combien de « mots » de 3 lettres différents peut-on former avec les lettres A, B C, D et E :

1. en utilisant au plus une fois chaque lettre ;
2. en utilisant autant de fois que l'on souhaite les lettres.

11 Quatre élèves participent à une course. Combien existe-t-il de configuration de podium à deux places (médaille d'or puis d'argent) ?

12 Sept élèves participent à une course. Combien existe-t-il de configuration de podium à trois places (médaille d'or et d'argent puis de bronze) ?

13 Combien de groupes de 2 élèves peut-on former dans une classe comportant 4 élèves ?

14 Combien de groupes de 3 élèves peut-on former dans une classe comportant 7 élèves ?

p-listes et arrangements

15 Soit $E = \{a; b; c; d\}$.

1. Combien y a-t-il de 3-listes d'éléments de E ?
2. Combien y a-t-il d'arrangements de 3 éléments de E ?

16 Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6. On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne.
On note les numéros obtenus, dans l'ordre d'apparition.
Combien existe-t-il de tirages possibles ?

17 En France, les préfixes des numéros de téléphone sont attribués à des opérateurs téléphoniques.

1. Orange possède tous les numéros commençant par 06 7 et 06 8.
   Combien cela représente-t-il de numéros ?
2. Bouygues Télécom s'est vu attribuer les numéros débutant par 06 58 jusqu'à 06 68 inclus, ainsi que les numéros commençant par 06 69 suivis d'un chiffre compris entre 0 et 7 inclus.
   Combien de cela représente-t-il de numéro ?

18 Depuis le 15 avril 2009, le format des plaques d'immatriculation en France est composé de deux lettres, trois chiffres (de 001 à 999), puis de deux lettres.
Les lettres I, O, U sont interdites (trop proches de 1, 0 et V), ainsi que les blocs SS et WW à gauche et à droite.

Combien de voitures peut-on immatriculer avec ce système ?

19 En utilisant les lettres A et B autant de fois qu'on le veut, combien peut-on former de « mots » à 2 lettres ? à 3 lettres ? Les donner tous.

20 Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot FRAISE ?

21 Combien d'anagrammes qui commencent par une consonne peut-on former avec les lettres du mot FENOUIL ?

22 Un voyageur de commerce doit visiter les cinq villes suivantes : Alzonne, Bram, Carcassonne, Douzens et Fanjeaux.

1. Combien de voyages peut-il réaliser ?
2. Combien de voyages peut-il réaliser si la troisième ville de passage doit être Bram ?

23 Un coffre-fort accepte comme combinaison toute suite de trois lettres et de quatre nombres compris entre 0 et 9.
Combien existe-t-il de combinaisons possibles ?

24 Combien d'anagrammes distinctes peut-on former avec les lettres du mot KAKI ? POMME ? ANANAS ? PAMPLEMOUSSE ?

25 Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot HYPOCONDRIAQUE qui commencent par une voyelle ?

26 Combien de mots de 3 lettres peut-on former avec les lettres du mot ARBRE ?

27 Gaston doit ranger 3 ceintures dans 3 tiroirs. Il ouvre ses tiroirs et place ses ceintures au hasard. Quelle est la probabilité qu'un tiroir contienne exactement 2 ceintures ? On examinera 4 cas, selon que l'on suppose les tiroirs et les ceintures discernables ou non.

28 Soit $n \geq 1$. On désigne par p_n la probabilité pour que dans un groupe de n personnes choisies au hasard, deux personnes au moins aient le même anniversaire (on considère que l'année a toujours 365 jours, tous équiprobables).

1. Montrer que
$$p_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{n-1}{365}\right).$$

2. À l'aide d'un algorithme, déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0{,}5$.

Combinaisons

29 On considère un ensemble E à 9 éléments.

1. Combien y a-t-il de parties de E à 3 éléments ?

2. Combien y a-t-il de parties de E à 6 éléments ?

30 Une urne contient six boules. On tire simultanément trois boules.
Combien existe-t-il de tirages possibles ?

31 Calculer à la main $\binom{5}{2}, \binom{22}{21}, \binom{11}{9}, \binom{7}{0}, \binom{10}{4}$.

32 On tire simultanément cinq cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de mains différentes peut-on obtenir ?

33 Une classe comporte 18 filles et 12 garçons.
On veut choisir 5 représentants de la classe pour la fête de fin d'année.
Combien y a-t-il de choix possibles :

1. si on les choisit parmi les filles ?

2. si on les choisit parmi les garçons ?

3. si on veut avoir un groupe de 3 filles et 2 garçons ?

34 Au self, vous avez le choix entre trois entrées différentes, deux plats principaux et quatre desserts. Vous ne pouvez pas prendre deux fois le même élément.
Combien de repas différents pouvez-constituer :

1. en prenant une entrée, un plat, un dessert ?

2. en prenant un plat et deux desserts ?

3. en prenant trois éléments quelconques ?

35 Démontrer la formule de Pascal en utilisant la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

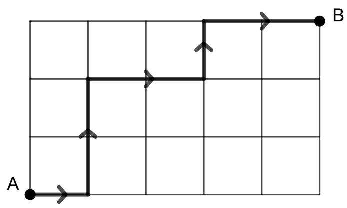
36 Soit k et n deux entiers naturels non nuls.

1. Démontrer par le calcul la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

2. On considère une classe de n élèves. Retrouver la formule précédente en comptant de deux façons différentes le nombre de comités de k élèves dans lequel un délégué a été désigné :

- en constituant d'abord le groupe puis en désignant le délégué ;
- en choisissant d'abord le délégué puis en constituant le groupe.

37 Dénombrer le nombre de trajectoires de plus court chemins pour aller de A et B. Généraliser.



38 On cherche à constituer un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.

1. Combien y a-t-il de groupes possibles ?

2. Combien y a-t-il de groupes ne comportant que des personnes de même sexe ?

3. Combien y a-t-il de groupes comportant au moins une femme et au moins un homme ?

39 Un domino présente deux côtés, dont les symboles peuvent être : blanc, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
Combien existe-t-il de dominos distincts ?

40 On dispose de huit boules dans un sac : trois noires, deux rouges et trois vertes. Les boules sont discernables (par exemple, elles sont numérotées de 1 à 8).

1. On tire simultanément trois boules du sac.

a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b. Combien y a-t-il de tirages comportant exactement deux boules noires ?

c. Pour répondre à la question « combien y a-t-il de tirages comportant au moins une boule noire ? », un élève propose le raisonnement suivant : « on choisit une boule noire, il y a $\binom{3}{1} = 3$ façons de procéder, puis on complète avec 2 boules parmi les 7 restantes, soit un total de $\binom{3}{1} \times \binom{7}{2} = 3 \times 21 = 63$ tirages ».
Expliquer pourquoi ce raisonnement est incorrect puis proposer une solution correcte.

2. On tire simultanément deux boules du sac. Combien de tirages comportent deux fois la même couleur ?

41 Soit n, p et q trois entiers tels que $p + q \geq n$.
Montrer que
$$\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2} = pq.$$

42 **(Génération des parties d'un ensemble)**

1. Expliquer comment le programme Python suivant génère les parties à 2 éléments d'un ensemble E quelconque (ici on a pris l'exemple d'un ensemble à 6 éléments, mais cela n'a aucune importante).

```
E=['a',4,'b','g',1,3]

parties=[]

for j in range(len(E)):
     for k in range(j+1,len(E)):
          nouv_part=[E[j],E[k]]
          parties=parties+[nouv_part]
```

2. Écrire un algorithme, en pseudo-code, permettant de générer les parties à 3 éléments d'un ensemble E.

43 Démontrer la formule du binôme de Newton par récurrence.

44 On pose $u_n = \binom{2n}{n}$ pour $n \geq 0$.
Montrer que la suite (u_n) est croissante.

45 Gaston doit ranger 4 ceintures (discernables) dans 4 tiroirs (discernables). Il ouvre ses tiroirs et place ses ceintures au hasard.
Combien y a-t-il de rangements dans lesquels :
1. un tiroir contient exactement trois ceintures ?
2. un seul tiroir contient exactement deux ceintures ?
3. deux tiroirs contiennent deux ceintures ?

Dénombrements divers

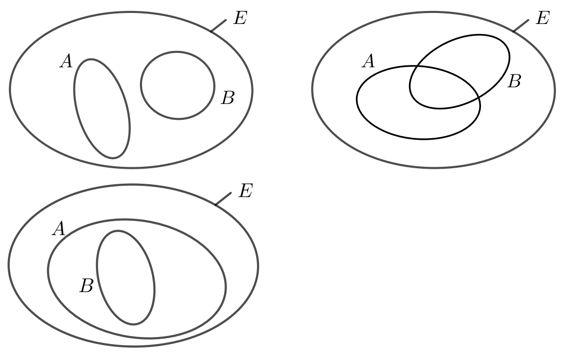
46 Un jeu de 32 cartes est formé des cartes 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as dans chacune des quatre couleurs trèfle, carreau, cœur et pique.
1. Combien de mains de 5 cartes peut-on former avec un jeu de 32 cartes ?
2. Combien de mains de 5 cartes contiennent :
   a. Exactement un roi, une dame et deux valets ?
   b. Exactement trois cartes de couleur noire ?
   c. Exactement un roi et deux carreaux ?
   d. L'as de pique et au moins deux trèfles ?

47 On range aléatoirement cinq boules distinguables dans quatre boîtes également distinguables.
1. Quel est le nombre de rangements possibles ?
2. Quel est le nombre de rangements dans lesquels toutes les boules sont rangées dans la même boîte ?
3. Quel est le nombre de rangements dans lesquels deux boîtes exactement sont vides ?
4. Même question avec une boîte vide.
5. En déduire le nombre de rangements dans lesquels aucune boîte n'est vide.

Problèmes

48 Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.
On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble noté $A\Delta B$ défini par $A\Delta B = \{x \in A \cup B\,;\, x \notin A \cap B\}$.

1. Hachurer $A\Delta B$ dans chacun des cas suivants.



2. On suppose maintenant que E est un ensemble fini non vide, et on considère un élément fixé $a \in E$.
   On définie la fonction φ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ par
   $$\varphi(A) = A\Delta\{a\}.$$
   a. Écrire plus simplement φ en distinguant deux cas : $a \in A$ et $a \notin A$.
   b. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $\varphi\big(\varphi(A)\big) = A$
   c. Soit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'ensemble des parties de E de cardinal pair (resp. impair).
   En utilisant φ et la question **b.**, montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ ont le même cardinal.

49 Soit n le nombre d'élèves de terminale d'un lycée. On s'intéresse au nombre de façons d_n de répartir les lycéens selon qu'ils font spécialité mathématiques ou pas, et qu'ils ont pris maths expert ou pas (maths expert ne peut se prendre qu'avec spé maths).
1. Calculer d_0, d_1 et d_2.
2. Démontrer qu'il y $2^k\binom{n}{k}$ façons de constituer des répartitions cherchées dans lesquelles k lycéens font spé maths.
3. En déduire que pour $n \geq 0$,
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} = 3^n.$$
4. Retrouver cette formule à l'aide du binôme de Newton.

Remarque. Plus formellement, on a calculé
$$\mathrm{Card}\left(\left\{(A\,;B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2;\ A \subset B\right\}\right)$$
où E est un ensemble à n éléments.

50 Soit E un ensemble à n éléments, avec $n \geq 1$ et
$$\Gamma = \left\{(A\,;B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2\,;\ \mathrm{Card}(A \cap B) = 1\right\}.$$
1. En dénombrant Γ de deux façons différentes, démontrer l'égalité :
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}2^{n-k} = n3^{n-1}.$$
2. En utilisant $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et le binôme de Newton, retrouver l'égalité de la question **1.**

51 L'algorithme suivant permet le calcul de la ligne N du tableau de Pascal.

> $L \leftarrow [1]$ *# première ligne du triangle ($n = 0$)*
> Pour n de 1 à N
> $M = [1]$ *# initialisation de la ligne n du tableau*
>   Pour k de 1 à $n-1$
>   Ajouter à $L[k-1] + L[k]$ dans la liste M
>   *# formule de Pascal*
>   Ajouter 1 dans la liste M *# fin de la ligne n*
> $L \leftarrow M$ *# la nouvelle ligne prend la place de l'ancienne*
> Retourner L

1. Programmer cette algorithme en Python sous d'une fonction **pascal(n)**.
2. Créer une fonction **parmi(k,n)** renvoyant $\binom{n}{k}$.

```
>>> pascal(5)
[1,5,10,10,5,1]

>>> parmi(3,5)
10
```

3. Vérifier numériquement la formule $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ pour n de 0 à 20.

52 Pour $n \geq 2$ fixé, on va chercher pour quelles valeurs de k le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est maximal ($0 \leq k \leq n$).
Pour simplifier les écritures, on pose $c_k = \binom{n}{k}$
1. Conjecturer la réponse en utilisant les premières lignes du triangle de Pascal.
2. Montrer que $c_{k+1} = \frac{n-k}{k+1}c_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$ et en déduire que

a. pour $k < \frac{n-1}{2}$, on a $c_k < c_{k+1}$;

b. pour $k > \frac{n+1}{2}$, on a $c_k < c_{k-1}$.

3. Démontrer alors que le maximum de $\binom{n}{k}$ est

a. c_p si n est pair avec $n = 2p$;

b. $c_p = c_{p+1}$ si n est impair avec $n = 2p + 1$.

53 **(Combinaison avec répétitions)**

1. Votre congélateur contient 3 bacs de glace : café, fraise, vanille. On note Γ_3^k le nombre de coupes de glace que l'on peut constituer avec k boules.
Calculer Γ_3^1, Γ_3^2 et Γ_3^3.

2. En choisissant un ordre dans les parfums, une coupe à 4 boules peut être représentée par des « o » pour le nombre de boules d'un certain parfum, et des « | » pour séparer les parfums. Ainsi : oo|o|o représente la coupe « 2 café, 1 fraise, 1 vanille » et |ooo|o représente la coupe « 3 fraise, 1 vanille ».
En déduire Γ_3^4 et Γ_3^5.

3. Montrer plus généralement si votre congélateur contient n parfums, le nombre de coupes de glaces à k boules que vous pouvez réaliser est $\Gamma_n^k = \binom{n+k-1}{k}$.

54 On désigne par n un entier naturel. Lors d'une soirée, n personnes sont déposent chacune leur chapeau au vestiaire, et suite à une coupure d'électricité, elles repartent dans le noir en prenant un chapeau au hasard.
On s'intéresse au nombre de possibilités qu'il existe pour qu'aucune personne ne reparte avec son chapeau.
En numérotant les personnes 1, 2, …, n et leurs chapeaux initiaux avec le numéro de la personne, nous devons chercher les permutations de l'ensemble $E = \{1; 2; \dots; n\}$ qui n'admettent aucun point fixe.
Par exemple pour $n = 4$, la permutation (2341) convient, mais pas (3241).
Notons d_n le nombre de telles permutations, appelées dérangements. On convient que $d_0 = 1$

1. Calculer d_1, d_2, d_3 et montrer que $d_4 = 9$.

2. En faisant une partition de l'ensemble des permutations selon leur nombre de points fixes, montrer que
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$$

3. À l'aide de la formule précédente, retrouver d_4 et calculer d_5.

55 Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n. On place toutes les boules au hasard dans n boîtes, chaque boîte pouvant contenir de 0 à n boules.
On désigne par p_n la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule.

1. Montrer que $p_n = \frac{n!}{n^n}$.

2. Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier $n \geq 0$, on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

3. En déduire que $\frac{p_n}{p_{n+1}} \geq 2$, puis que $p_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$?

56 Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^n$.

1. Développer f avec le binôme de Newton et en déduire
$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

2. En déduire une formule pour $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$.

3. Retrouver l'égalité précédente en dénombrant de deux façons différentes le nombre de groupes de n élèves dans lequel l'un d'eux a été désigné délégué que l'on peut former :
- en choisissant d'abord le délégué puis en complétant le groupe ;
- en choisissant d'abord le groupe puis en désignant le délégué.

57 Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$
On utilisera la formule du binôme de Newton et la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ valable pour $1 \leq k \leq n$.

58 Démontrer que pour tous entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$, on a
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

59 Soit n et k deux entiers vérifiant $0 \leq k \leq n$.
Nous allons étudier l'algorithme suivant.

```
x ← n − k
y ← 0
c ← 1
Tant que x < n
    x ← x + 1
    y ← y + 1
    c ← cx/y
Fin Tant que
```

1. Donner la valeur finale de c si $k = 0$.

2. Donner la valeur finale de c si $k = 1$ (en supposant $n \geq 1$) et si $k = 2$ (en supposant $n \geq 2$) en justifiant.

3. Donner la valeur finale de c si $n = 19$ et $k = 5$.

4. Justifier que la boucle « tant que » est exécutée k fois.

5. Pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq k$, on note x_i, y_i et c_i les valeurs respectives de x, y et c à l'issue du i^{e} passage dans la boucle.
On pose $x_0 = n - k$, $y_0 = 0$ et $c_0 = 1$.
Démontrer par récurrence sur i que pour tout i vérifiant $0 \leq i \leq k$, on a
$$x_i = n - k + i,\ y_i = i \text{ et } c_i = \binom{n-k+i}{i}.$$

6. En déduire que la valeur finale de c dans l'algorithme est bien $\binom{n}{k}$.

7. Justifier l'intérêt de rajouter au début de l'algorithme précédent les trois lignes suivantes.

```
Si k > n/2
    k ← n − k
Fin Si
```

8. Programmer l'algorithme sous forme d'une fonction Python **comb(n,k)**.