Somme de variables aléatoires

1. Rappels de première

❖ Variables aléatoires

On considère Ω l'univers d'une expérience aléatoire (c'est-à-dire l'ensemble de ses issues). Lorsqu'on associe à chaque issue un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire. Plus précisément :

Définition. *Une* <u>*variable aléatoire discrète*</u> *sur Ω est une fonction de Ω dans ℝ. Elle est dite discrète si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X définie sur Ω. Pour tout $x \in X(\Omega)$, on note $(X = x)$ l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X. De façon analogue, on définit $(X \geq x)$, $(X < x)$ etc.
Pour $A \subset X(\Omega)$, l'événement noté $(X \in A)$ est l'ensemble des $x \in \Omega$ tels que $X(x) \in A$.

<u>Exemple A</u>

Une urne contient 9 jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 9. Un joueur participe à une loterie gratuite qui suit la règle suivante :

- il prélève au hasard un jeton de l'urne ;
- si le numéro est pair, il gagne 1 €, s'il prélève le jeton n°1 ou n°9 il gagne 10 € et dans tous les autres cas il perd 3 €.

On définit ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.
Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont 1, 10 et -3, donc $X(\Omega) = \{1; 10; -3\}$.
On a $(X = 1) = \{2; 4; 6; 8\}$, $(X = 10) = \{1,9\}$ et $(X = -3) = \{3; 5; 7\}$.

❖ Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition. *Soit Ω un univers sur lequel a été définie une loi de probabilité P. On considère une variable aléatoire X sur Ω.*
Définir la <u>*loi de probabilité*</u> *de X, c'est donner pour tout $x \in X(\Omega)$ la probabilité $P(X = x)$.*

Au lycée, on étudiera essentiellement les variables aléatoires discrètes, par conséquent, si l'on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on pourra présenter la loi de probabilité sous forme de tableau.

<u>Exemple A</u>

La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant.

x_i	1	10	-3
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$

Soit G l'événement « le joueur gagne de l'argent ». On a $G = (X \in \{1,10\})$ et $P(G) = \frac{6}{9}$.

2. Opérations sur les variables aléatoires

Une variable aléatoire n'étant rien d'autre qu'une fonction à valeurs réelles, on peut définir un certain nombre d'opérations identiques à celles des fonctions.
Étant donné un réel a et deux variables aléatoires X et Y définies sur le même univers Ω on note

- a la variable aléatoire constante définie par $a(\omega) = a$ pour tout $\omega \in \Omega$;
- $X + Y$ la variable aléatoire définie par $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$;
- XY la variable aléatoire définie par $(XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$;
- $\frac{X}{Y}$ la variable aléatoire définie par $\left(\frac{X}{Y}\right)(\omega) = \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}$ pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $Y(\omega) \neq 0$.
- $f(X)$ la variable aléatoire définie par $f(X)(\omega) = f\big(X(\omega)\big)$, si f est une fonction définie sur un intervalle I tel que $I \subset X(\Omega)$.

Exemple A

Pour attirer les joueurs, l'organisateur double les gains de la loterie et donne 1 € à tous les participants. La variable aléatoire Y donnant le gain algébrique de ce nouveau jeu est donc $2X + 1$. On a alors $Y = 2X + 1$, ou encore $X = \frac{Y-1}{2}$.

Exemple

On lance 3 fois un dé à six faces, numérotées 1 à 6. On note X la somme des numéros obtenus à l'issue des 3 lancers. Si l'on pose X_i le numéro au lancer numéro i, on a

$$X = X_1 + X_2 + X_3.$$

Exemple (important)

On lance 20 fois une pièce de monnaie et on note X le nombre de piles obtenues. Si l'on pose $X_i = 1$ si l'on a obtenu pile au lancer numéro i et $X_i = 0$ si l'on a obtenu face au lancer numéro i, on a

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{20} = \sum_{i=1}^{20} X_i.$$

3. Espérance, variance, écart-type

Dans ce paragraphe, X est une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ (c'est-à-dire $P(X = x_i) = p_i$).

❖ Espérance

Définition. *L'espérance de X est le réel noté $E(X)$ défini par*

$$E(X) = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

L'espérance d'une variable aléatoire peut s'interpréter comme la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois.
Lorsque les valeurs prises par X représentent le gain algébrique à un jeu, le jeu est favorable si $E(X) > 0$, défavorable si $E(X) < 0$ et équitable si $E(X) = 0$.

Exemple A

L'espérance de X est

$$E(X) = \frac{4}{9} \times 1 + \frac{2}{9} \times 10 + \frac{3}{9} \times (-3) = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

Cela signifie qu'en jouant un grand nombre de fois, un joueur peut espérer gagner en moyenne environ 1,67 € à chaque partie.

Remarques.

1. Soit $X = a$ une variable constante, alors $E(X) = a$. En effet, l'événement $(X = a)$ est certain, donc $P(X = a) = 1$, d'où $E(X) = 1 \times a = a$.

2. Supposons que l'univers Ω soit fini, avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$. Dans la définition de l'espérance ci-dessus, on a regroupé les issues ω en fonction de leur image x. Si l'on s'affranchit de ce regroupement, on a une définition plus simple :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} X(\omega_i)P(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Par exemple, le calcul de l'espérance dans l'exemple A donne :

$$\begin{aligned} E(X) &= X(1)P(\{1\}) + X(2)P(\{2\}) + X(3)P(\{3\}) + X(4)P(\{4\}) + X(5)P(\{5\}) \\ &\qquad + X(6)P(\{6\}) + X(7)P(\{7\}) + X(8)P(\{8\}) + X(9)P(\{9\}) \\ &= 10 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{1}{9} - 3 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{1}{9} - 3 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{1}{9} - 3 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{1}{9} + 10 \times \frac{1}{9} \\ &= 10 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{4}{9} - 3 \times \frac{3}{9} \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Théorème (linéarité de l'espérance). Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a un réel. On a

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \text{ et } E(aX) = aE(X).$$

Démonstration. Par définition, pour tout $\omega \in \Omega$, $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$, donc

$$E(X + Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X + Y)(\omega)P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \big(X(\omega)P(\{\omega\}) + Y(\omega)P(\{\omega\})\big).$$

En séparant la somme en deux,

$$E(X + Y) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\{\omega\}) = E(X) + E(Y).$$

De même, comme $(aX)(\omega) = aX(\omega)$,

$$E(aX) = \sum_{\omega \in \Omega} aX(\omega)P(\{\omega\}) = a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) = aE(X). \ \blacksquare$$

Exemple A

L'espérance de $Y = 2X + 1$ est

$$E(X) = E(2X + 1) = E(2X) + E(1) = 2E(X) + 1 = 2 \times \frac{5}{3} + 1 = \frac{13}{3}.$$

Par une récurrence immédiate, on a la généralisation suivante.

Théorème. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires,

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n).$$

❖ Variance, écart-type

Définition. *La* <u>*variance*</u> *de X est le réel positif noté* $\mathrm{Var}(X)$ *défini par*

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

ou plus explicitement par

$$\mathrm{Var}(X) = p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + \cdots + p_n\left(x_n - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - E(X)\right)^2$$

L'<u>*écart-type*</u> *de X est réel noté σ défini par $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.*

La variance d'une variable aléatoire mesure la dispersion de ses valeurs. L'écart-type joue le même rôle tout en ayant la même unité que X.

<u>Exemple A</u>

La variance de X est

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{4}{9}\left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\left(10 - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{3}{9}\left(-3 - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{206}{9}$$

et son écart-type vaut $\frac{\sqrt{206}}{3}$.

Théorème. Soit a et b deux réels. On a

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X) \text{ et } \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Démonstration. La linéarité de l'espérance fait tout le travail :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX + b) &= E\left[\left(aX + b - E(aX + b)\right)^2\right] = E[(aX + b - aE(X) - b)^2] \\ &= E\left[\left(a\left(X - E(X)\right)\right)^2\right] = E\left[a^2\left(X - E(X)\right)^2\right] = a^2E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] \\ &= a^2\mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

Enfin en se rappelant que $\sqrt{a^2} = |a|$, le résultat sur l'écart-type suit. ■

Il paraît normal que b n'intervienne pas dans le calcul de $\mathrm{Var}(aX + b)$ puisque la variance mesure l'écart à la moyenne, écart que l'on ne modifie pas en considérant $X + b$ au lieu de X.

<u>Exemple A</u>

Pour attirer les joueurs, l'organisateur de la loterie augmente de 10 % tous les gains et donne 1 € à tous les participants, et ce à chaque partie. La variable aléatoire donnant le gain algébrique est $Y = 1{,}1X + 1$ et sa variance est $1{,}1^2\ \mathrm{Var}(X) = 1{,}1^2 \times \frac{\sqrt{206}}{3}$

Théorème (formule de Huygens). On a la formule

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Démonstration. En développant le carré,

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2).$$

Donc par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) + E(-2E(X)X) + E(E(X)^2).$$

Or $E(-2E(X)X) = -2E(X) \times E(X) = -2E(X)^2$ et $E(E(X)^2) = E(X)^2$, d'où le résultat. ■

4. Variables aléatoires indépendantes

On rappelle que deux événements A et B d'un univers sont dits indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Cela équivaut à $P_A(B) = P(B)$ si $P(A) \neq 0$, ou encore à $P_B(A) = P(A)$ si $P(B) \neq 0$.
Si $P(B) \neq 0$, la formule $P(A \cap B) = P_B(A)P(B)$ est toujours valable.

Définition. *Soit X_1, X_2, …, X_n des variables aléatoires définies sur un univers Ω.*
On dit que ces variables aléatoires sont (mutuellement) indépendantes si pour tous réels x_1, x_2, …, x_n, on a

$$P\big((X_1 = x_1) \cap \dots (X_n = x_n)\big) = P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_n = x_n).$$

Attention, il ne suffit pas que des variables aléatoires soient indépendantes deux à deux pour être mutuellement indépendantes (voir exercices).

Exemple

On lance deux fois d'affilée un dé équilibré à 6 faces. On note X la somme des numéros obtenus et Y leur produit. On a $\Omega = \{(i;j), 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$, et

- $P(X = 4) = P\big((1;3)\big) + P\big((2;2)\big) + P\big((3;1)\big) = 3 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$;
- $P(Y = 3) = P\big((1;3)\big) + P\big((3;1)\big) = 2 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$;
- $P\big((X = 4) \cap (Y = 3)\big) = P(Y = 3) = \frac{1}{18}$.

Ainsi $P\big((X = 4) \cap (Y = 3)\big) \neq P(X = 4)P(Y = 3)$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Théorème. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y) \text{ et } \mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Démonstration. On admet l'égalité sur l'espérance.
La formule de Huygens et la linéarité de l'espérance donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X + Y) &= E((X + Y)^2) - \big(E(X + Y)\big)^2 \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - \big(E(X) + E(Y)\big)^2 \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - \big(E(X)\big)^2 - 2E(X)E(Y) - \big(E(Y)\big)^2 \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\big(E(XY) - E(X)E(Y)\big).
\end{aligned}$$

Puisque $E(XY) = E(X)E(Y)$, il reste donc $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ ■

Remarque. Si X et Y sont deux variables aléatoires (quelconque), le réel $E(XY) - E(X)E(Y)$ s'appelle la covariance de X et Y et se note $\mathrm{Cov}(X;Y)$. La démonstration ci-dessus montre que

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X;Y).$$

Dans le cas particulier où X et Y sont indépendantes, on a $\mathrm{Cov}(X;Y) = 0$.

Le théorème précédent reste vrai pour un nombre quelconque de variables aléatoires, mais c'est plus difficile à démontrer.

Théorème. Si X_1, …, X_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes,

$$\mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \dots + \mathrm{Var}(X_n).$$

5. Échantillon d'une loi de probabilité

Définition. *On appelle* <u>*échantillon de taille n*</u> *d'une loi de probabilité un n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires X_i indépendantes et suivant cette loi.*

On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la somme de ces variables aléatoires et $M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ leur moyenne.

Théorème.
1. $E(S_n) = nE(X_1)$ et $E(M_n) = E(X_1)$.
2. $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(M_n) = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}$.
3. $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\,\sigma(X_1)$ et $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}$.

Démonstration.
1. Par linéarité de l'espérance,
$$E(S_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$$
mais comme les X_i ont tous la même loi, notamment celle de X_1, on a $E(X_i) = E(X_1)$ pour tout $1 \leq i \leq n$, d'où $E(S_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_1) = nE(X_1)$. Il vient alors
$$E(M_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n}\,nE(X_1) = E(X_1).$$
2. Vu que les (X_i) sont indépendantes, le théorème précédent donne $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1)$, puis
$$\mathrm{Var}(M_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2}\,n\mathrm{Var}(X_1) = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}.$$
3. Ces relations s'obtiennent en prenant la racine carrée dans les relations du **2.** ■

Définition. *On dit qu'une variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres n et p si elle peut s'écrire comme une somme d'un échantillon de la loi de Bernoulli de paramètre p.*

On retrouve la définition utilisée jusqu'à présent de la loi binomiale : on répète n fois de façon indépendante une expérience qui n'a que deux issues : succès (avec une probabilité p) et échec. Si l'on appelle X_i la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès à la i^{e} expérience et 0 sinon, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p et le nombre de succès à l'issue de ces n expérience est bien $X = X_1 + \cdots + X_n$.