Somme de variables aléatoires – Exercices

Opérations sur les variables aléatoires

1 Une urne contient 4 boules jaunes, 3 boules vertes et 5 boules rouges. On tire simultanément deux boules dans l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues.
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Décrire les événements $(X = 2)$ et $(X \geq 1)$.

2 On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à ce qu'une des faces apparaisse deux fois. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires.
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.

3 On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X le numéro obtenu au premier lancer et Y celui obtenu au second.
Donner la loi des variables aléatoires X, Y, $2X$ et $X + Y$.

4 On choisit au hasard une famille de trois enfants et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de filles de cette famille.
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Écrire à l'aide de X l'événement A « il y a plus de filles que de garçons dans cette famille »

5 On choisit au hasard un nombre entre 0 et 39. Soit X la variable aléatoire égale au chiffre des unités et Y celle égale au chiffre des dizaines.
1. Déterminer la loi de X et celle de Y.
2. Calculer $P(X = Y)$.
On souhaite simuler un grand nombre de fois l'expérience précédente pour retrouver une valeur approchée de $P(X = Y)$ en assimilant la fréquence de réalisation de l'événement $(X = Y)$ à sa probabilité.
Compléter l'algorithme suivant et l'expérimenter.

```
from random import *
C = 0
for k in range(1000):
   n = randint(0,39)
   X = …
   Y = …
   if …
      C = …
print(C)
```

3. Calculer $P(XY > 15)$.
4. Calculer $P(X + Y = 10)$.

Espérance, variance, écart-type

6 On considère les variables aléatoires X et Y dont les lois sont données ci-dessous.

x_i	-1	2	3	7
$P(X = x_i)$	0,3	0,2	0,4	0,1

y_i	-1	0	1
$P(Y = x_i)$	0,5	0,2	0,3

1. Calculer l'espérance X, Y et $X + Y$.
2. Calculer la variance de X, Y et $X + Y$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$ et retrouver le résultat de la question **2.**

7 Un sac contient 26 jetons marqués avec les 26 lettres de l'alphabet. On tire un premier jeton, puis un second jeton sans remettre le premier dans le sac. On gagne 5 € par voyelle tirée et on perd 1 € par consonne tirée. Soit X le gain algébrique du joueur.
1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance de X. Ce jeu est-il favorable au joueur ?
3. Calculer la variance et l'écart-type de X.

8 On choisit un nombre au hasard entre 1 et 50. Soit X la variable aléatoire correspondant à la somme des chiffres du nombre obtenu.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.
3. Calculer $P(X \leq 5)$ et $P(X \geq 10)$.

9 QCM. On désigne par X une variable aléatoire. Une seule réponse est correcte.
1. Si $E(X) = -2$ alors $E(-X)$ est égal à :
a. 2 **b.** -2 **c.** 4
2. Si $E(X) = 0$ alors $E(3X + 1)$ est égal à :
a. 1 **b.** 3 **c.** 4
3. Si $\mathrm{Var}(X) = 5$ alors $\mathrm{Var}(3X + 1)$ est égal à
a. 15 **b.** 45 **c.** 48

10 Un exercice comporte trois questions A, B, C auxquelles il faut répondre par vrai ou faux.
Un élève répond au hasard à l'exercice. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses.
1. Donner la loi de X et calculer son espérance.
Une bonne réponse rapporte 3 points, une mauvaise enlève 1 point.
2. Afin de déterminer la note que peut espérer l'élève, on procède à une simulation. Compléter les fonctions suivantes et expliquer leur rôle. Expérimenter.

```
def rep():
   if randint(0,1) == …
      return …
   else:
      return …

def qcm():
   S = …
   for k in range(3):
      S = …
   return S

def moyenne():
   M = …
   for k in range(1000):
      M = …
   return M/1000
```

3. Soit S la variable aléatoire donnant le nombre de points obtenu (la note peut être négative).
Montrer que $S = 4X - 3$. Quelle note peut espérer l'élève ?
4. Modifier les fonctions précédentes pour que le nombre de choix possibles à chacune des questions, le nombre

de questions du QCM et le nombre d'expériences simulées soient données en argument à la fonction moyenne :

```
>>> moyenne(2,3,1000)
2.996

>>> moyenne(3,5,10000)
1.6492
```

11 Une urne contient $n+5$ boules indiscernables au toucher : 5 blanches et n noires (avec $n \geq 3$).
Un joueur tire des boules de l'urne. Pour chaque boule noire tirée il perd 1 € et pour chaque boule blanche tirée il gagne 2 €.

1. Dans cette question, le joueur effectue deux tirages successifs avec remise. Soit X le gain algébrique du joueur.
  a. Déterminer la loi de probabilité de X.
  b. Montrer $E(X) = \frac{20-2n}{n+5}$.

2. Dans cette question, le joueur effectue deux tirages successifs sans remise. Soit Y le gain algébrique du joueur.
Démontrer que $E(Y) = E(X)$.

3. Déterminer pour quelles valeurs de n le jeu est favorable au joueur.

4. Pour pouvoir jouer on doit donner 2 €.
  a. Dans les deux cas, quelle est la nouvelle espérance ?
  b. Cynthia ne souhaite pas jouer. Pourquoi ?

Variables aléatoires indépendantes

12 On considère les variables aléatoires X et Y dont la « loi de couple » est donnée dans le tableau ci-dessous.
Par exemple $P\big((X=1)\cap(Y=2)\big) = \frac{1}{6}$.

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Donner la loi de X, Y et XY.
2. Justifier que X et Y ne sont pas indépendantes.
3. Montrer que $E(XY) = E(X)E(Y)$.
Qu'illustre cette égalité ?

13 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a. $\operatorname{Var}(2X - Y) = \operatorname{Var}(2X) - \operatorname{Var}(Y)$
b. $\operatorname{Var}(2X - Y) = 2\operatorname{Var}(X) - \operatorname{Var}(Y)$
c. $\operatorname{Var}(2X - Y) = \operatorname{Var}(2X) + \operatorname{Var}(Y)$
d. $\operatorname{Var}(2X - Y) = 4\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$

14 On lance deux dés équilibrés. On note X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire égale à 1 si le premier dé (resp. le second) donne un nombre pair et 0 sinon.
On note Y la variable aléatoire égale à 1 si la somme des numéros obtenus est paire et 0 sinon.
Montrer que ces trois variables aléatoires sont indépendantes deux à deux, mais pas mutuellement indépendantes.

Échantillon d'une loi de probabilité

15 On lance 15 fois un dé équilibré, on note X_i la variable égale à 1 si le nombre obtenu au i^{e} lancer est 4, et égale à 0 sinon.

1. Quelle est la loi de X_i, pour tout $1 \leq i \leq 15$?
2. Quelle est la loi de $X = X_1 + \cdots + X_{15}$? Que représente X concrètement ?
3. Donner l'espérance, la variance, l'écart-type de X_1 et X.

16 On lance 5 dés équilibrés à 6 faces. On note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus et X_i la variable aléatoire égale au numéro du i^{e} dé.

1. Déterminer la loi de X_i, son espérance, sa variance et son écart-type.
2. Quelle égalité lie X et les X_i ? En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Problèmes

17 On lance n fois une pièce de monnaie amenant pile avec la probabilité p (où $0 < p < 1$). On note X le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier « Pile ». Si Pile ne sort pas, on pose $X = 0$.

1. Déterminer la loi de X.
2. On souhaite montrer que
$$E(X) = \frac{1}{p}\left[1 - (1+np)(1-p)^n\right].$$
  a. Soit $q = 1 - p$ et f la fonction définie sur $]0;1[$ par
  $$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$
  Montrer que $E(X) = pf'(q)$.
  b. Exprimer $f(x)$ sous forme d'un quotient.
  c. En déduire une autre expression de $f'(x)$ et en déduire $E(X)$.
  d. En justifiant que, pour tout $n \geq 1$,
  $$nq^n = \exp\left(n\left(\frac{\ln n}{n} + \ln q\right)\right),$$
  démontrer que $(nq^n)_{n\geq 0}$ a pour limite 0 et déterminer la limite de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

18 On dispose de m chapeaux que l'on range aléatoirement dans n tiroirs, où m et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1. On appelle X le nombre de tiroirs vides à l'issue de la distribution.

1. Justifier que $X(\Omega) \subset \{0;1;\ldots;n-1\}$.
2. Créer une fonction **tiroirs_vides(n,m)** qui simule la distribution de m chapeaux dans n tiroirs et qui renvoie le nombre de tiroirs vides.
Que fait alors la fonction suivante ?

```
def loi_tiroirs_vides(n,m,j):
   T=[0]*n
   for i in range(j):
      T[tiroirs_vides(n,m)]+=1
   return [t/j for t in T]
```

3. Donner la loi et l'espérance de X pour $n \in \{1;2\}$.
4. On suppose $n = 3$.
  a. Calculer $P(X = 2)$.
  b. Justifier qu'il y a $2^m - 2$ façons de ranger m chapeaux dans deux tiroirs de façons à ce qu'aucun des deux ne soit vide. En déduire que $P(X = 1) = \frac{2^m - 2}{3^{m-1}}$.
  c. Montrer que $E(X) = \frac{2^m}{3^{m-1}}$.

5. On suppose $n = 4$.
   a. Calculer $P(X = 3)$.
   b. Justifier que $P(X = 2) = \binom{4}{2}\frac{2^m - 2}{4^m}$.
   c. Justifier qu'il y a $3^m - 3(2^m - 2) - 3$ façons de ranger m chapeaux dans trois tiroirs de façons à ce qu'aucun des trois ne soit vide. En déduire la probabilité $P(X = 1)$.
   d. Montrer que $E(X) = \frac{3^m}{4^{m-1}}$.
6. On suppose $m = 2$.
   a. Donner la loi de X pour $n = 1$.
   b. Pour $n \geq 2$, justifier que $P(X = k) \neq 0$ uniquement pour $k \in \{n - 2; n - 1\}$. Donner la loi de X.
   c. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $E(X) = \frac{(n-1)^2}{n}$.
7. On suppose $m = 3$.
   a. Donner la loi de X pour $n = 1$ et $n = 2$.
   b. Pour $n \geq 3$, justifier que la loi de X est la suivante.

k	$n-3$	$n-2$	$n-1$
$P(X = k)$	$\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$	$\frac{3(n-1)}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$

   c. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $E(X) = \frac{(n-1)^3}{n^2}$.
8. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le i^{e} tiroir est vide à l'issue de la distribution des m chapeaux, et 0 sinon.
   a. Justifier que X_i suit une loi de Bernoulli et donner son paramètre.
   b. Justifier que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et en déduire $E(X)$.

19 Une forme de promotion des ventes assez répandue consiste à mettre dans chaque paquet un objet (image, figurine, …) pris dans une collection de n objets. L'acheteur est invité à conserver ces objets et à reconstituer la collection.
Pour un entier m, on s'intéresse au nombre X d'éléments différents obtenus après m achats.

1. Dans cette question uniquement, on choisit $n = 2$.
   À l'aide d'arbres de probabilités, construire le tableau de la loi de X pour $m \in \{1; 2; 3; 4\}$ et calculer l'espérance de X pour chacune des valeurs de m.
2. La collection des n objets peut être représentée par une liste où un objet est codé par 0 s'il n'est pas dans la collection et 1 sinon. Par exemple, pour $n = 4$, la liste [1,1,0,1] signifie que le collectionneur possède tous les objets sauf le troisième.
   a. Compléter la fonction Python **collec(n,m)** qui simule l'état d'une collection de n objets après m achats.

```
def collec(n,m):
   C = …        #collection vide
   for k in range(…):
      C[randint( … )] = …
   return C
```

   Exemple d'exécution :

```
>>> collec(5,3)
[1,0,0,1,0]
```

   b. Écrire une fonction **approx_esp(n,m)** qui calcule la fréquence moyenne sur 100 expériences.

```
>>> approx_esp(5,3)
2,45
```

3. Pour tout i compris entre 1 et n, on considère la variable aléatoire X_i égale à 1 si l'objet numéro i est en possession du collectionneur après m achats, et 0 sinon.
   a. Quelle est la loi de X_i ? Préciser ses paramètres.
   b. Justifier que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. En déduire l'espérance de X et comparer aux résultats de la question **1.** et à ceux des simulations effectuées à la question **2.**
   c. Quelle est la limite de $E(X)$ lorsque m tend vers $+\infty$? Interpréter.
4. On suppose dorénavant que $m = n$ et on pose
$$u_n = \frac{E(X)}{n}.$$
   a. Calculer u_n pour $n \in \{1; 2; 3; 4\}$. Interpréter.
   b. En remarquant que
$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}}$$
   et en utilisant la dérivabilité de la fonction ln en 1, démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1$
   c. Déterminer la limite de u_n et interpréter. Comparer aux valeurs obtenues par simulation.
5. On s'intéresse à présent au nombre d'achats nécessaire T_n avant que la collection de n objets soit complète. On pose $T_n = 0$ si la collection n'est pas complète.
   a. Quelles valeurs peut prendre T_n ?
   b. Compléter la fonction suivante qui simule le remplissage aléatoire d'une collection et compte le nombre d'achats avant qu'elle soit complète.

```
def attente(n):
   C = …       #collection vide
   m = …      #aucun achat
   while …
      L[randint( …  )] = …
      m = …
   return m
```

   c. En effectuant un grand nombre de simulations, estimer l'espérance de T_n pour $n \in \{1; 2; 3; 4\}$.
6. Étude de la variable aléatoire T_2.
   a. Démontrer que pour tout $k \geq 2$,
$$P(T_2 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$
   b. Démontrer que, pour $N \geq 2$,
$$\sum_{k=2}^{N} P(T_2 = k) = 1 - \frac{1}{2^{N-1}}$$
   et déterminer la limite de cette expression quand N tend vers $+\infty$. En déduire $P(T_n = 0)$.
   c. Démontrer par récurrence que, pour $N \geq 2$,
$$\sum_{k=2}^{N} kP(T_2 = k) = 3 - \frac{N+2}{2^{N-1}}.$$
   et déterminer la limite de cette expression quand N tend vers $+\infty$. Interpréter.

Remarque. On peut montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$E(T_n) = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

20 À un concours, se présentent p femmes et q hommes, où p et q sont des entiers supérieurs ou égaux à 1. On suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo. On appelle X la variable aléatoire donnant le rang de la première femme dans le classement du concours.

Pour ce qui nous intéresse, un classement peut être résumé à une succession de « F » et « H ». Par exemple, pour $p = 3$ et $q = 5$, un classement possible est HHFFHHFH, et dans ce cas $X = 3$.

1. Donner la loi de X et calculer son espérance dans les cas suivants :
- **a.** $p = 1, q = 2$
- **b.** $p = 2, q = 1$
- **c.** $p = 2, q = 2$
- **d.** $p = 2, q = 3$
- **e.** $p \geq 1$ et $q = 1$. Montrer qu'alors $E(X) = 1 + \frac{1}{p+1}$.
- **f.** $p = 1$ et $q \geq 1$. Montrer qu'alors $E(X) = 1 + \frac{q}{2}$.

2. On suppose dans cette question $q = 2$.
- **a.** Quelles sont les valeurs possibles de X ?
- **b.** Que vaut $P(X = 1)$?
- **c.** Justifier les égalités
$P(X = 3) = \frac{2}{(p+2)(p+1)}$ et $P(X = 2) = \frac{2p}{(p+1)(p+2)}$.
- **d.** En déduire que $E(X) = 1 + \frac{2}{p+1}$.

3. Nous allons utiliser Python pour simuler des classements.
- **a.** Pour simuler un classement aléatoire, on commence par générer une liste L contenant p « F » et q « H ». Ensuite, tant que L n'est pas vide, on choisit un élément au hasard dans L que l'on ajoute à une liste C et qu'on supprime de L. La liste C contient ainsi un classement aléatoire.
Compléter la fonction suivante et la programmer.

```
def class_alea(p,q):
   L = ['F']*p+['H']*q
   C = []
   while ...
      s = random.choice(...)
      C = ...
      L.remove(...)
return C
```

```
>>> class_alea(2,4)
['H', 'H', 'F', 'H', 'H', 'F']
```

- **b.** Écrire et programmer une fonction **rang(p,q)** qui donne le rang de la première femme dans un classement aléatoire renvoyée par la fonction précédente **class_alea(p,q)**.

```
>>> rang(8,37)
9
```

- **c.** En simulant un grand nombre d'expériences, écrire une fonction **approx_esp(p,q)** qui calcule une valeur approchée de l'espérance de X.

```
>>> approx_esp(8,37)
5.107
```

4. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq q$, on appelle X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'homme numéro i est classé avant toutes les femmes, et 0 sinon.
- **a.** Quelle est la loi de X_i ?
- **b.** Justifier que $X = 1 + \sum_{i=1}^{q} X_i$.
- **c.** En déduire $E(X)$. Est-ce cohérent avec les résultats obtenus dans les questions **1.** et **2.** ?

5. Écrire une fonction **approx_var** qui calcule une valeur approchée de la variance de X. On pourra utiliser la formule de Huygens.

```
>>> approx_var(8,37)
16.828871149375
```

Remarque. On peut montrer que $\mathrm{Var}(X) = \frac{pq(p+q+1)}{(p+1)^2(p+2)}$.

21 Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On lance n fois une pièce de monnaie, et on note X (resp Y) le nombre de séquences Pile-Face (resp. Pile-Pile) obtenues. Par exemple, pour $n = 7$, le lancer PPFPPPF conduit à $X = 2$ et $Y = 3$.

1. Établir la loi de X et Y pour $n \in \{2; 3; 4\}$. Montrer que $E(X) = E(Y)$ dans chaque cas.

2. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n - 1$, on appelle X_i la variable aléatoire égale à 1 si une séquence PF démarre au i^{e} lancer, et 0 sinon.
- **a.** Donner la loi de X_i.
- **b.** Justifier que $X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ et en déduire $E(X)$.
- **c.** Calculer $E(Y)$.

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \geq 0$ on note
- $a_{n,k}$ le nombre de lancers se terminant par P et ayant k séquences PF lorsqu'on effectue n lancers ;
- $b_{n,k}$ le nombre lancers se terminant par F et ayant k séquences PF lorsqu'on effectue n lancers.

3. Que vaut $a_{1,0}$? Justifier que $b_{n,0} = 1$ pour $n \geq 1$.

4. Démontrer que si $k > \frac{n}{2}$, on a $a_{n,k} = b_{n,k} = 0$.

5. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a
- $a_{n+1,k} = a_{n,k} + b_{n,k}$ pour tout $k \geq 0$;
- $b_{n+1,k} = a_{n,k-1} + b_{n,k}$ pour tout $k \geq 1$.

6. À l'aide des relations précédentes, calculer $a_{n,k}$ et $b_{n,k}$ pour $n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. On présentera les résultats dans un tableau à double similaire au triangle de Pascal pour les coefficients binomiaux.
Retrouver les résultats de la question **1.**

n \ k	**0**	**1**	**2**
1			
2			
3			
4			
5			

Tableau des $a_{n,k}$

n \ k	**0**	**1**	**2**
1			
2			
3			
4			
5			

Tableau des $b_{n,k}$

7. Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ ont été définis pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n$. Pour $k > n$, on pose $\binom{n}{k} = 0$ (ce qui loisible puisqu'il n'existe pas d'ensemble à k éléments choisis parmi n dans ce cas).
Vérifier que la formule de Pascal
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$
qui a été établie en cours pour $0 \leq k \leq n - 1$ reste valable pour $k \geq n$.

8. Prouver par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété :
« pour tout $k \geq 0$, $a_{n,k} = \binom{n}{2k+1}$ et $b_{n,k} = \binom{n}{2k}$ ».

9. En déduire que la loi de X est donnée, pour tout $k \geq 0$, par
$$P(X = k) = \frac{\binom{n+1}{2k+1}}{2^n}.$$