Intégration

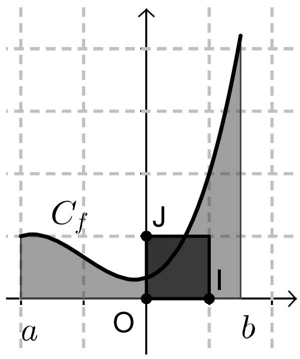
1. Intégrale d'une fonction continue positive

❖ Définition de l'intégrale

Définition. *Dans un repère orthogonal* $(O; I, J)$ *on appelle* <u>*unité d'aire*</u> *l'aire du rectangle de côtés* $[OI]$ *et* $[OJ]$.

Définition. *Soit* f *une fonction continue positive sur l'intervalle* $[a; b]$ *et* C_f *sa courbe représentative dans un repère orthogonal* $(O; I, J)$.
<u>*L'intégrale de* f *entre* a *et* b</u> *est l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe* C_f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = a$ *et* $x = b$*. On note ce nombre* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
On dit que a *est la* <u>*borne inférieure*</u> *de l'intégrale et* b *sa* <u>*borne supérieure*</u>.

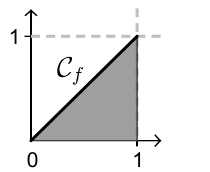
Sur la figure ci-contre, on a coloré en noir le rectangle donnant l'unité d'aire et en gris l'aire sous la courbe.



Remarque.
1. La variable x peut-être remplacée par n'importe quelle autre lettre dans l'écriture de l'intégrale. Par exemple $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ désignent les mêmes nombres.
2. On voit que $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ si $a \leq b \leq c$.

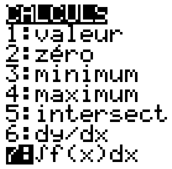
<u>**Exemple**</u>

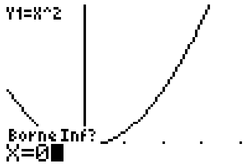
Calculons $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto x$ est positive et continue sur $[0; 1]$. Le nombre $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ est donc l'aire du triangle rectangle ci-contre. Donc $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

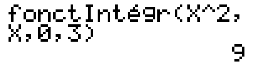


<u>**Exemple**</u>

À l'aide la calculatrice on va calculer $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x$. Après avoir rentré la fonction $x \mapsto x^2$ dans l'éditeur d'équation, ouvrir l'outil « calculs » en faisant $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$. Choisir ensuite `∫ f(x) dx`, rentrer la borne inférieure (ici 0) puis la borne supérieure (ici 3) puis valider.
On lit alors $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = 9$. La simplicité de ce résultat sera justifiée plus loin.
On peut aussi utiliser la commande `fonctIntégr` accessible par la touche $\boxed{\text{math}}$ puis la commande n°9 de l'onglet `MATH`.







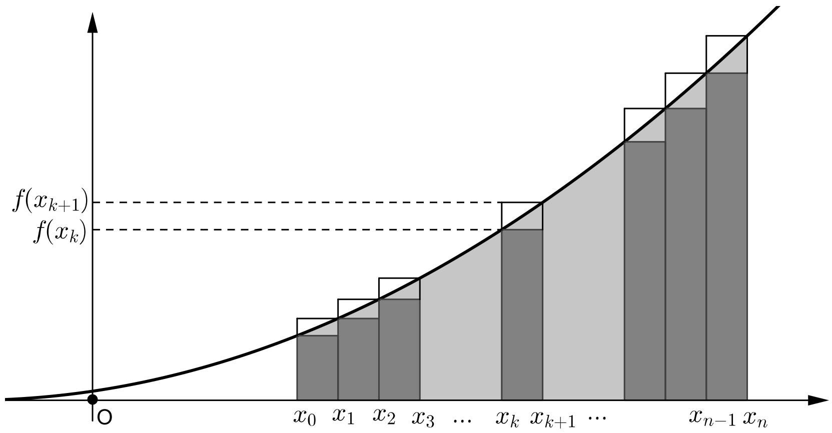
On peut aussi procéder grâce à un logiciel de calcul formel, par exemple Xcas.

integrer(x^2,x,0,3)
9

❖ Encadrement de l'intégrale d'une fonction positive

Pour déterminer une approximation de l'intégrale d'une fonction continue positive sur $[a;b]$, on peut partager l'intervalle $[a;b]$ en n sous-intervalles de même longueur $h=\frac{b-a}{n}$.
Posons pour $0 \leq k \leq n$, $x_k = a + \frac{b-a}{n} \times k$. Les intervalles $[x_k;x_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq n-1$ forment une subdivision de $[a;b]$ en n intervalle de même longueur h.
Sur chacun des intervalles $[x_k;x_{k+1}]$, l'aire sous la courbe de f est comprise entre les aires de deux rectangles de largeur h, l'un de hauteur $f(x_k)$, l'autre de hauteur $f(x_{k+1})$. Ainsi l'intégrale $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre $hf(x_k)$ et $hf(x_{k+1})$.
Pour obtenir un encadrement de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, il suffit donc de sommer les aires des rectangles inférieurs et celles des rectangles supérieurs.
On obtient donc l'algorithme suivant dans lequel u représente l'aire « inférieure » et v l'aire « supérieure ».

$h \leftarrow \frac{b-a}{n}$
$x \leftarrow a$
$u \leftarrow 0$
$v \leftarrow 0$
Pour k de 0 à $n-1$
  $u \leftarrow u + hf(x)$
  $x \leftarrow x + h$
  $v \leftarrow v + hf(x)$
Fin Pour
Retourner u, v



2. Primitives et intégrales

> **Théorème.** Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a;b]$.

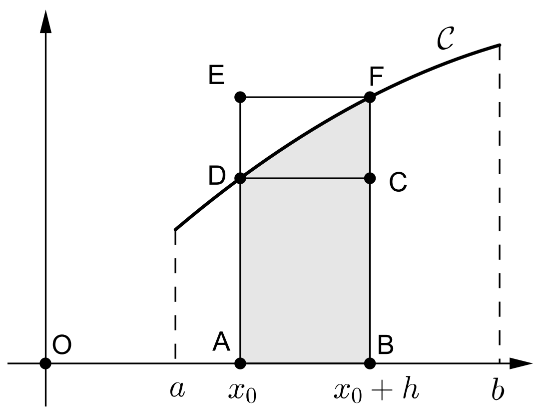
Démonstration. Prouvons ce théorème dans le cas où f est croissante. Soit $x_0 \in [a;b]$ et $h > 0$ un réel tel que $x_0 + h \in [a;b]$.
L'aire $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ est la différence des aires $\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$, donc

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mais cette aire est comprise entre l'aire des rectangles $ABCD$ et $ABFE$ qui sont respectivement $hf(x_0)$ et $hf(x_0+h)$, donc

$$hf(x_0) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq hf(x_0+h)$$

d'où, puisque $h > 0$,



$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0+h).$$

La fonction f étant continue, on a $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ par conséquent en passant à la limite dans l'inégalité précédente d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

De même si $h < 0$, on obtient $f(x_0+h) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$ et donc

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

On a donc prouvé que F est dérivable en x_0 avec $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

Théorème. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F l'une de ses primitive. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Démonstration. On sait qu'étant donné une fonction continue f sur un intervalle $[a;b]$, il n'existe qu'une seule primitive s'annulant en a. Or on dispose de deux telles fonctions :

- D'après le théorème précédent, $G: x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a;b]$ et de plus $G(a) = 0$.
- Si F désigne une primitive quelconque de f sur $[a;b]$, la fonction $H: x \mapsto F(x) - F(a)$ est une primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

Par conséquent les fonctions G et H sont égales sur $[a;b]$, c'est dire que pour tout $x \in [a;b]$, on a $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$. En particulier pour $x = b$, on a la relation voulue. ■

Notation. La quantité $F(b) - F(a)$ se note $[F(x)]_a^b$.

Exemple

Avec la calculatrice dans le paragraphe 1, nous avons vu que $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = 9$. Une primitive de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$, ainsi

$$\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9.$$

3. Intégrale d'une fonction continue

Grâce au théorème précédent, on étend la définition d'intégrale à toutes les fonctions continues, quel que soit leur signe.

Définition. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I (de signe quelconque) et soit a, b deux réels de I. En désignant par F une primitive de f, on appelle <u>intégrale de f entre a et b</u> le réel $F(b) - F(a)$:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Remarque. L'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie. En effet on sait que si F est une primitive de f, toute autre primitive G est de la forme $F + k$ où k est un réel. Par conséquent,

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a).$$

Exemple

Calculons $\int_{-2}^1 x^3\,\mathrm{d}x$. Une primitive de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{x^4}{4}$, par conséquent

$$\int_{-2}^{1} x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = -\frac{15}{4}.$$

Théorème 6. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b, c, trois réels de I et k un réel quelconque.

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

3. $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

4. $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

5. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ (relation de Chasles)

6. Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

7. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Attention $a \leq b$!

Démonstration. Soit F une primitive de f et G une primitive de g.

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$.

2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Une primitive de kf est kF, donc

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = (kF)(b) - (kF)(a) = k\big(F(b) - F(a)\big) = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Une primitive de $F + G$ est $f + g$, donc

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) =$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

6. Ceci résulte de la définition de l'intégrale dans le cas où f est positive.

7. On a $g(x) - f(x) \geq 0$, donc d'après (6),

$$\int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

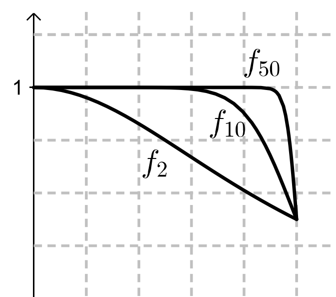
puis d'après (4), $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, ou encore $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. ■

Remarque. Si la fonction f est positive, la relation de Chasles provient de l'additivité de l'aire.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. On va déterminer la limite de (u_n).

Soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$. En observant la courbe de la fonction f_n pour des grandes valeurs de n, on conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.



Calculons $1 - u_n$. On peut écrire $1 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$, donc

$$1 - u_n = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs

$$0 \leq x \Rightarrow 0 \leq x^n \Rightarrow 1 \leq 1 + x^n \Rightarrow \frac{1}{1+x^n} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$$

Comme clairement $\frac{x^n}{1+x^n} \geq 0$ pour $x \geq 0$, on a finalement $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$. En intégrant, on obtient $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$. Comme $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, il vient

$$0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u_n = 0$. De plus $u_n = 1 - (1 - u_n)$, donc finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 - 0 = 1$.

4. Intégration par parties

Théorème (intégration par parties). Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ telles que u' et v' sont continues, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. On a $(uv)' = u'v + uv'$, donc $uv' = (uv)' - u'v$. Par conséquent,

$$\int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$$

Une primitive de $(uv)'$ est bien sûr uv, donc $\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b$, ce qui est la formule annoncée. ■

Ce théorème permet de calcul des intégrales de fonction de la forme uv', à condition que l'on puisse facilement déterminer une primitive de v et de $u'v$.

Exemple

Calculons $I = \int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$. Si l'on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$, on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$, donc

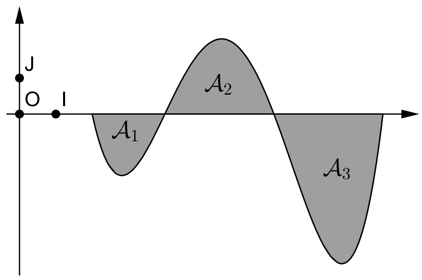
$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x = (e - 0) - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

La même technique permet de déterminer une primitive F de $f : x \mapsto xe^x$. En désignant plus généralement une primitive de g par $\int g$,

$$F(x) = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x = (x - 1)e^x.$$

5. Applications

❖ Calcul d'aire



On a vu que si f est une fonction continue et positive, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Si f est continue et de signe quelconque, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique sous la courbe, c'est-à-dire que l'aire est

comptée négativement si la courbe est sous l'axe des abscisses.
Ainsi sur le graphique ci-contre, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$.
Si l'on veut la surface de l'aire colorée, il faut donc calculer $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

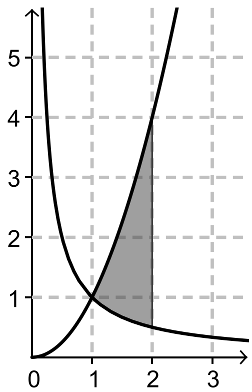
Théorème. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $f(x) \leq g(x)$. L'aire, exprimée en unité d'aire, de la surface comprise entre les courbes représentatives de f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$.

1. Montrer que pour $x \geq 1$, on a $f(x) \leq g(x)$.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre les courbes représentatives de f et g et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.



Réponse.

1. Pour $x \geq 1$, on a $x^2 \geq 1$ et $\frac{1}{x} \leq 1$, par conséquent $\frac{1}{x} \leq x^2$.
2. Sur $[1;2]$ on a $f(x) \leq g(x)$, donc l'aire cherchée est égale à $\mathcal{A} = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$. Par suite

$$\mathcal{A} = \left[\frac{x^3}{3} - \ln x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \ln 2 - \left(\frac{1}{3} - \ln 1\right) = \frac{7}{3} - \ln 2 \approx 1{,}64.$$

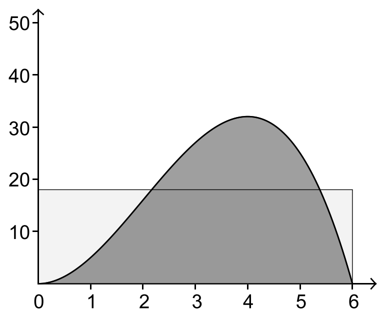
❖ Valeur moyenne d'une fonction

Définition. *Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ on appelle <u>valeur moyenne de f sur $[a;b]$</u> le réel défini par $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.*

Exemple

Lors d'une épidémie de grippe dans un lycée, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas est donné par la fonction

$$f(t) = 6t^2 - t^3.$$



Le nombre moyen de malade est la valeur moyenne de f, soit

$$\frac{1}{6-0}\int_0^6 6t^2 - t^3\,\mathrm{d}t.$$

Une primitive de $t \mapsto 6t^2 - t^3$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto 2t^3 - \frac{t^4}{4}$, donc la valeur moyenne de f est $\frac{108}{6} = 18$. Cela signifie que si le nombre d'apparitions de malades avait été constant durant l'épidémie, il aurait été de 18 par jours.