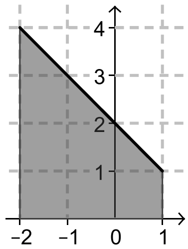
Intégration – Exercices

Intégrale d'une fonction positive

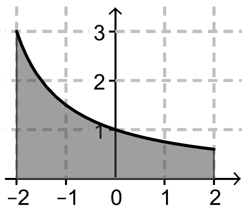
1 On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2; 1]$ par $f(x) = -x + 2$.



1. Comment s'appelle l'aire colorée sur la figure ? Comment se note-t-elle ? La calculer par lecture graphique.
2. Par lecture graphique, déterminer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2 On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = \frac{3}{x+3}$. On pose

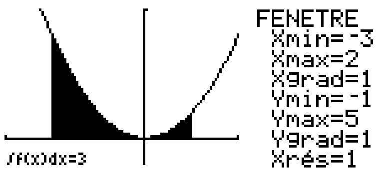
$$I = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



1. Déterminer par lecture graphique un encadrement de I.
2. Utiliser une calculatrice pour donner une valeur approchée à 10^{-3} près de I.
3. Vérifier que le résultat ci-contre renvoyé par un logiciel de calcul formel est cohérent avec la question **2**.

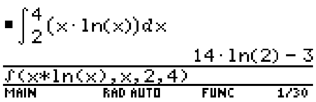
```
int(3/(x+3),x,-2,2)
                3 ln 5
```

3 On a représenté ci-contre sur l'intervalle $[-3; 2]$ la fonction f définie par $f(x) = x^2$ puis on a hachuré l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$.



1. À quelle intégrale correspond cette aire ? Combien vaut-elle ?
2. Obtenir le même écran sur la calculatrice avec les réglages donnés ci-dessus.

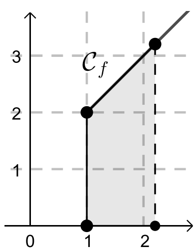
4 À l'aide de la calculatrice calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $\int_2^4 x \ln x\ \mathrm{d}x$.



Vérifier la cohérence avec l'impression d'écran du logiciel de calcul formel ci-dessus.

Primitives et intégrales

5 Soit f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = x + 1$ et F définie sur $[1; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.



1. Par un calcul d'aire, montrer que $F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$
2. Calculer $F'(x)$. Que remarque-t-on ?

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 4x + 6.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. Soit F la fonction définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x$.
   a. Vérifier que la dérivée de F est f.
   b. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 0$.

Intégrale d'une fonction continue

7 Calculer les intégrales suivantes.

a. $I = \int_{-1}^{3} 4x\,\mathrm{d}x$ b. $I = \int_0^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

c. $I = \int_2^4 \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ d. $I = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

e. $I = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$ f. $I = \int_0^1 x(1-x^2)^5\,\mathrm{d}x$

g. $I = \int_1^0 \frac{2}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$ h. $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+3}\,\mathrm{d}x$

8 On pose $J = \int_2^4 \frac{2x-1}{x-1}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \neq 1$, $\frac{2x-1}{x-1} = a + \frac{b}{x-1}$.
2. En déduire la valeur de J.

9 Soit f une fonction définie et continue sur $[-3; 5]$ admettant le tableau de variation suivant.

x	-3	1	3	5
f	4 ↘	2 ↗	6 ↘	-3

1. Déterminer le signe de $\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. On donne $f(4) = 0$. Donner le signe de $\int_5^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Donner un encadrement de $\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

10 Soit f définie sur $[-1; 0]$ par $f(x) = \frac{3x+4}{(x+2)^2}$.

1. Dresser le tableau de variations de f et en déduire un encadrement de f sur $[-1; 0]$.
2. Soit $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $1 \leq I \leq \frac{9}{8}$.
3. Vérifier que pour tout $x \in [-1; 0]$, $f(x) = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$ et en déduire la valeur exacte de I.

11 Étudier le signe de $x^2 - 4x + 3$ et en déduire la valeur de $\int_1^5 |x^2 - 4x + 3|\,\mathrm{d}x$ à l'aide de la relation de Chasles.

Intégration par parties

12 Calculer les intégrales suivantes.

a. $I = \int_0^3 (x-1)e^x\ \mathrm{d}x$ b. $I = \int_1^e x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$

c. $I = \int_2^4 (2x+3)e^{-4x}\ \mathrm{d}x$ d. $I = \int_0^1 x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

13 Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a. $f(x) = \ln x$ sur $]0; +\infty[$.
b. $f(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$.
c. $f(x) = (x+1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

14 Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x.$$

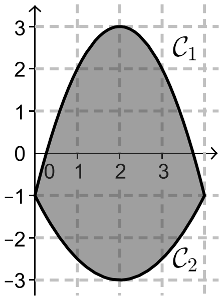
1. Montrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner la valeur exacte de I_0. En déduire les valeurs de I_1, I_2 et I_3.

Calculs d'aires

15 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

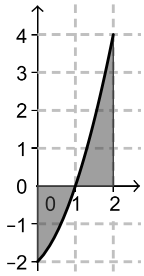
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$$
$$\text{et } g(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

On a représenté ci-contre les courbes de f et g sur $[0; 4]$.



1. Associer chaque fonction à sa courbe.
2. Montrer que pour tout réel $x \in [0; 4]$, $g(x) - f(x) \geq 0$.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
4. En déduire l'aire du domaine coloré.

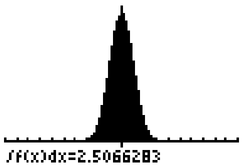
16 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 2$.



1. Étudier le signe de f.
2. En déduire l'aire du domaine grisé ci-contre.

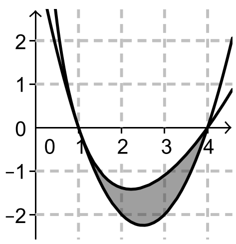
17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer son maximum.
2. Tracer la courbe de f sur la calculatrice et calculer
$$I = \int_{-10}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Comparer cette valeur à $\sqrt{\pi}$.

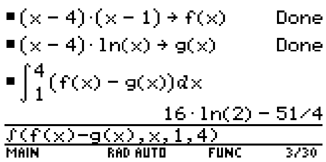


18 On considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par

- $f(x) = (x-4)(x-1)$
- $g(x) = (x-4)\ln x$.



1. Démontrer que les courbes de f et g admettent la même tangente au point d'abscisse 1.
2. On pose $\varphi(x) = x - 1 - \ln x$.
   a. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\varphi(x) \geq 0$.
   b. Montrer que $f(x) - g(x) = (x-4)\varphi(x)$.
   c. En déduire la position relative des courbes de f et g.
   d. À l'aide de l'impression d'écran ci-contre déterminer la valeur exacte de l'aire colorée.
   Retrouver la valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

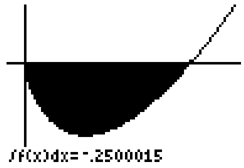


19 On considère la fonction f définie par sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1. Démontrer que la fonction F définie par
$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'aire entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

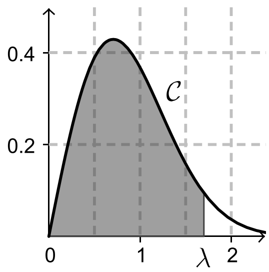
20 On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x\ln x$ pour $x \in]0; 1]$ et $f(0) = 0$.

1. Justifier que f est continue sur $[0; 1]$.
2. Montrer que la fonction F définie sur $[0; 1]$ par
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 \text{ si } x \in]0; 1] \text{ et } F(0) = 0$$
est une primitive de f sur $[0; 1]$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Utiliser la calculatrice pour retrouver ce résultat par un calcul d'aire.



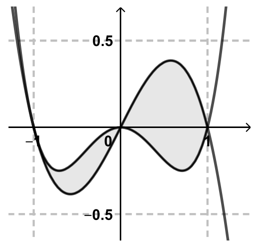
21 f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x^2}$ et $\mathcal{C}$ désigne sa courbe dans un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm en abscisse et 5 cm en ordonnées.

Soit λ un réel positif.



1. Calculer l'aire $A(\lambda)$ comprise entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \lambda$.
2. Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$ et interpréter graphiquement.

22 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^2(x^2 - 1)$$
$$g(x) = x(1 - x^2)$$



1. Étudier la position relative des courbes de ces fonctions.
2. En déduire l'aire du domaine compris entre ces deux courbes sur l'intervalle $[-1; 1]$.

Encadrements et suites d'intégrales

23 On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que (I_n) est décroissante.
2. Prouver que (I_n) est minorée. Qu'en déduit-on ?
3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0; 1]$, on a
$$(1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n.$$
   b. En déduire que $I_n \leq \frac{e}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c. Déterminer alors la limite de (I_n).

24 *(2010, Liban).* On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

1. a. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.
   b. Calculer u_1. En déduire u_0.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq 0$.
3. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,
$$u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}.$$
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

25 **(constante d'Euler)** *(2005, métropole).*

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose
$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } u_n = H_n - \ln n.$$

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul
$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}.$$
   b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a
$$H_n - 1 \leq \ln n \leq H_n - \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leq u_n \leq 1.$$
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

b. En déduire le sens de variations de (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) converge. On note γ la limite de la suite (u_n) (on ne cherchera pas à calculer γ).
Quelle est la limite de la suite (H_n) ?

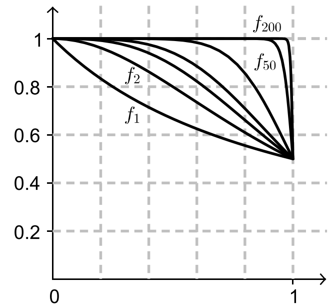
26 Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver que
$$f'(x)=\frac{1-2x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)}.$$
puis étudier les variations de f.

2. Montrer que $f(x)\leq\frac{1}{2x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

27 *(2014, Asie).* Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par $f_n(x)=\frac{1}{1+x^n}$. Pour tout entier $n\geq1$, on définit le nombre I_n par $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-contre.
En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.



2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. a. Démontrer que, pour tout réel $x\in[0;1]$ et pour tout entier naturel $n\geq1$, on a $\frac{1}{1+x^n}\leq1$.

b. En déduire que, pour tout entier $n\geq1$, on a $I_n\leq1$.

4. Démontrer que, pour tout $x\in[0;1]$ et pour tout entier $n\geq1$, on a $1-x^n\leq\frac{1}{1+x^n}$.

5. Calculer l'intégrale $\int_0^1(1-x^n)\,\mathrm{d}x$.

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

> $I\leftarrow0$
> Pour k allant de 0 à $p-1$ faire :
> $x\leftarrow\frac{k}{p}$
> $I\leftarrow I+\frac{1}{1+x^n}\times\frac{1}{p}$
> Fin Pour
> Retourner I

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n=2$ et $p=5$?
On justifiera la réponse en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

Problèmes, sujets de baccalauréat

28 *(2010, Polynésie).* **Partie A –**

1. On considère la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x)=\ln(2x)+1-x$.

a. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[1;+\infty[$ une unique solution notée α.

b. Démontrer que $\ln(2\alpha)+1=\alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}=\ln(2u_n)+1$.
On appelle (Γ) la courbe d'équation $y=\ln(2x)+1$ dans un repère orthonormé.

a. En utilisant la courbe (Γ), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$1\leq u_n\leq u_{n+1}\leq3.$$

c. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

Partie B – On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)e^{1-x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

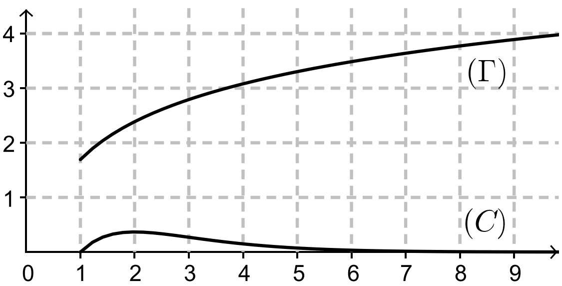
1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :
$$F(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x(t-1)e^{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

a. Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1;+\infty[$.

b. Montrer que pour tout $x\in[1;+\infty[$ on a
$$F(x)=-xe^{1-x}+1.$$

c. Démontrer que sur $[1;+\infty[$, l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x)+1=x$.

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=a$.
Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, de D_a, soit égale à $\frac{1}{2}$ et hachurer D_a sur le graphique.



29 *(2013, Antilles-Guyane).* Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A – Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=(x+1)e^x$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)=(x+2)e^x$.

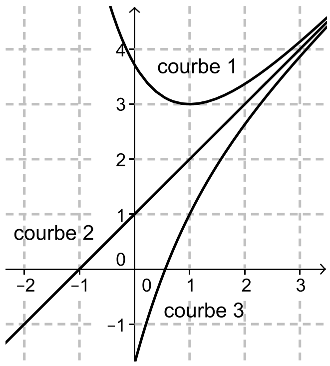
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B – On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :
$$g_m(x)=x+1-me^{-x}$$
et on note C_m la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1. a. Démontrer que $g_m(x)=0$ si et seulement si $f(x)=m$.

b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe C_m avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté ci-contre les courbes C_0, C_e, C_{-e} (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).
Identifier chacune de ces courbes sur le graphique en justifiant.

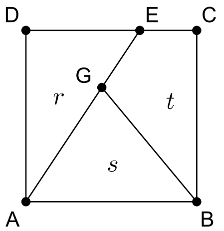


3. Étudier la position de la courbe C_m par rapport à la droite D d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.
4. **a.** On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes C_e, C_{-e} , l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur le graphique.
   b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre C_e, C_{-e}, l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire. Démontrer que pour tout réel a positif
$$\mathcal{A}\ (a) = 2e - 2e^{1-a}.$$
   En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

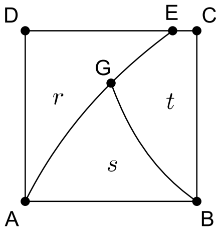
30 *(2015, centres étrangers).*
Les parties A et B sont indépendantes
Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise.
Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré $ABCD$, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C1 et C2 suivantes :

- Condition C1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes :
  - une des lignes est le segment $[AD]$;
  - une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment $[DC]$;
  - la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne.
- Condition C2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre 0,3 et 0,4, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées r, s, t sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Partie A – Étude de la proposition A.
Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \frac{1}{3}$.
Déterminer les coordonnées des points E et G.

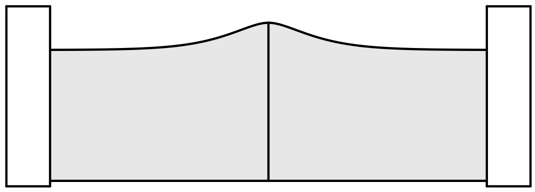
Partie B – Étude de la proposition B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :

- la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x > 0$ par : $f(x) = \ln(2x + 1)$;
- la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par : $g(x) = k\left(\frac{1-x}{x}\right)$, où k est un réel positif qui sera déterminé.

1. **a.** Déterminer l'abscisse du point E.
   b. Déterminer la valeur du réel k, sachant que l'abscisse du point G est égale à 0,5.
2. **a.** Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x > 0$ par :
$$F(x) = (x + 0{,}5) \times \ln(2x + 1) - x.$$
   b. Démontrer que $r = \frac{e}{2} - 1$.
3. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que $s = (\ln 2)^2 + \frac{\ln 2 - 1}{2}$.
   La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?

31 *(2014, Amérique du Sud).* On désire réaliser un portail comme indiqué ci-contre. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.



pilier vantail de gauche vantail de droite pilier

Partie A – Modélisation de la partie supérieure du portail
On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + b$ où b est un nombre réel.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 2]$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.
2. Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4}$.

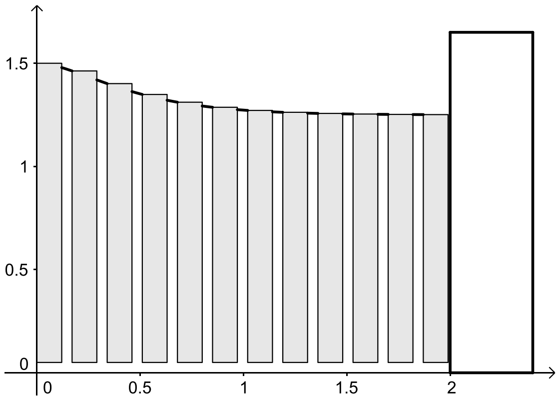
Partie B – Détermination d'une aire
Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $F(x) = \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4}x$ est une primitive de la fonction f.
2. En déduire l'aire en m² de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

Partie C – Utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir ci-dessous) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur.

Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.



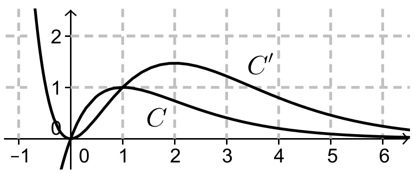
1. Donner l'aire de la planche numéro k.
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

> $S \leftarrow 0$
> $X \leftarrow 0$
> Tant que $X + 0{,}12 <$ . . . .
> $S \leftarrow S +$ . . . .
> $X \leftarrow X + 0{,}17$
> Fin Tant que
> Retourner S

32 *(2011, centres étrangers).* Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{1-x} \text{ et } g(x) = x^2e^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont respectivement notées C et C'. Leur tracé est donné ci-dessus.



1. **Étude des fonctions f et g**
   - **a.** Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.
   - **b.** Justifier le fait que f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.
   - **c.** Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.
2. **Calcul d'intégrales**

   Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,\mathrm{d}x$.
   - **a.** Calculer la valeur exacte de I_0.
   - **b.** Prouver que tout entier naturel n, on a
   $$(n+1)I_n - I_{n+1} = 1.$$
   - **c.** En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.
3. **Calcul d'une aire plane**
   - **a.** Étudier la position relative des courbes C et C'.
   - **b.** On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre les courbes C et C', et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. En exprimant A comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité : $A = 3 - e$.
4. **Étude de l'égalité de deux aires**

   Soit a un réel strictement supérieur à 1.

   On désigne par $S(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre les courbes C et C' et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$. On admet que $S(a)$ s'exprime par $S(a) = 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1)$.

   L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires A et $S(a)$ sont égales.
   - **a.** Démontrer que l'équation $S(a) = A$ est équivalente à l'équation : $e^a = a^2 + a + 1$.
   - **b.** *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

     Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.

34 *(2017, métropole).*

Partie A – On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

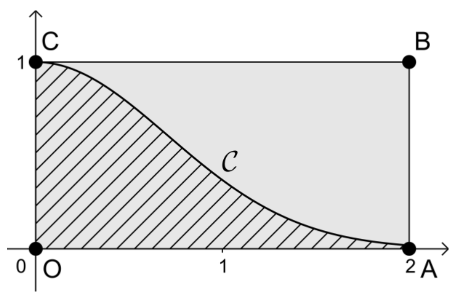
$$u_n = \int_0^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n.

1. **a.** Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   - **b.** Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a :
   $$-x^2 \leq -2x + 1,$$
   puis :
   $$e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}.$$
   En déduire que pour tout entier naturel n, on a
   $$u_n < \frac{e}{2}.$$
   - **c.** Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.
2. Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur approchée de u_2.

   Dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et le rectangle $OABC$ où $A(2; 0)$, $B(2; 1)$ et $C(0; 1)$.

   On a hachuré le domaine D compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.



   On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un point M au hasard à l'intérieur du rectangle $OABC$.

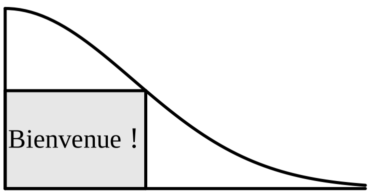
   On admet que la probabilité p que ce point appartienne au domaine est $p = \frac{\text{aire de } D}{\text{aire de } OABC}$.
   - **a.** Justifier que $u_2 = 2p$.
   - **b.** On considère l'algorithme suivant.

L1	Pour k variant de 1 à N
L2	$X \leftarrow$ nombre aléatoire entre 0 et 2
L3	$Y \leftarrow$ nombre aléatoire entre 0 et 1
L4	Si $Y \leq e^{-X^2}$ alors
L5	C prend la valeur $C+1$
L6	$F \leftarrow \frac{C}{N}$
L7	Retourner C, F

i. Que permet de tester la condition de la ligne L4 concernant la position du point $M(X;Y)$?
ii. Interpréter la valeur F retournée par cet algorithme.
iii. Que peut-on conjecturer sur la valeur de F lorsque N devient très grand ?

c. En faisant fonctionner cet algorithme pour $N = 10^6$, on obtient $C = 441138$.
On admet dans ce cas que la valeur F affichée par l'algorithme est une valeur approchée de la probabilité p à 10^{-3} près.
En déduire une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près.

Partie B – Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Le panneau, modélisé par le domaine D défini dans la partie A, est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre. Il est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; l'unité choisie est le mètre.
Pour x nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;2]$, on note

- M le point de la courbe C_f de coordonnées $\left(x; e^{-x^2}\right)$;
- N le point de coordonnées $(x;0)$;
- P le point de coordonnées $\left(0; e^{-x^2}\right)$;
- $A(x)$ l'aire du rectangle $ONMP$.

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;2]$, on a $A(x) = xe^{-x^2}$.
2. Déterminer la position du point M sur la courbe C_f pour laquelle l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale.
3. Le rectangle $ONMP$ d'aire maximale obtenu à la question **2.** doit être peint en bleu, et le reste du panneau en blanc. Déterminer, en m² et à 10^{-2} près, la mesure de la surface à peindre en bleu et celle de la surface à peindre en blanc.

33 *(2024, Amérique du Nord).* Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :
$I_n = \int_0^\pi e^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \int_0^\pi e^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $I_n \geq 0$.
b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a.
$$I_{n+1} - I_n \leq 0.$$
c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$
b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :
$$\int_0^\pi e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-e^{-n\pi}}{n}.$$
c. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).
4. **a.** En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:
$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \text{ et } I_n = \frac{1}{n}J_n.$$
b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a
$$I_n = \frac{1+e^{-n\pi}}{n^2+1}.$$
5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.
Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
from math import *
def seuil() :
    n = 0
    I = 2
    ...
        n = n + 1
        I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
```

35 *(suite de l'exercice 14).*
Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales
$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner la valeur exacte de I_0. En déduire les valeurs de I_1, I_2 et I_3.
3. Montrer par récurrence qu'il existe deux suites d'entiers relatifs (a_n) et (b_n) telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = a_n e + b_n$$
et qu'elles vérifient les relations de récurrence
$$a_{n+1} = 1 - (n+1)a_n \text{ et } b_{n+1} = -(n+1)b_n.$$
4. Donner une expression de b_n en fonction de n.
5. On pose $u_n = (-1)^n \frac{a_n}{n!}$. Montrer que
$$u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1}$$
et en déduire que pour tout entier naturel n,
$$a_n = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
6. Après avoir justifier la formule suivante pour a_n, démontrer que cet algorithme calcule a_n.
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

```
a = 0 # suite (a_n)
c = 1
s = 1

for k in range(n+1):
    a = a + s * c
    c = c * (n-k)
    s = -s
```