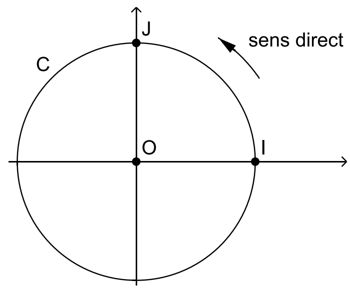
Trigonométrie

1. Repérage sur le cercle trigonométrique et radian

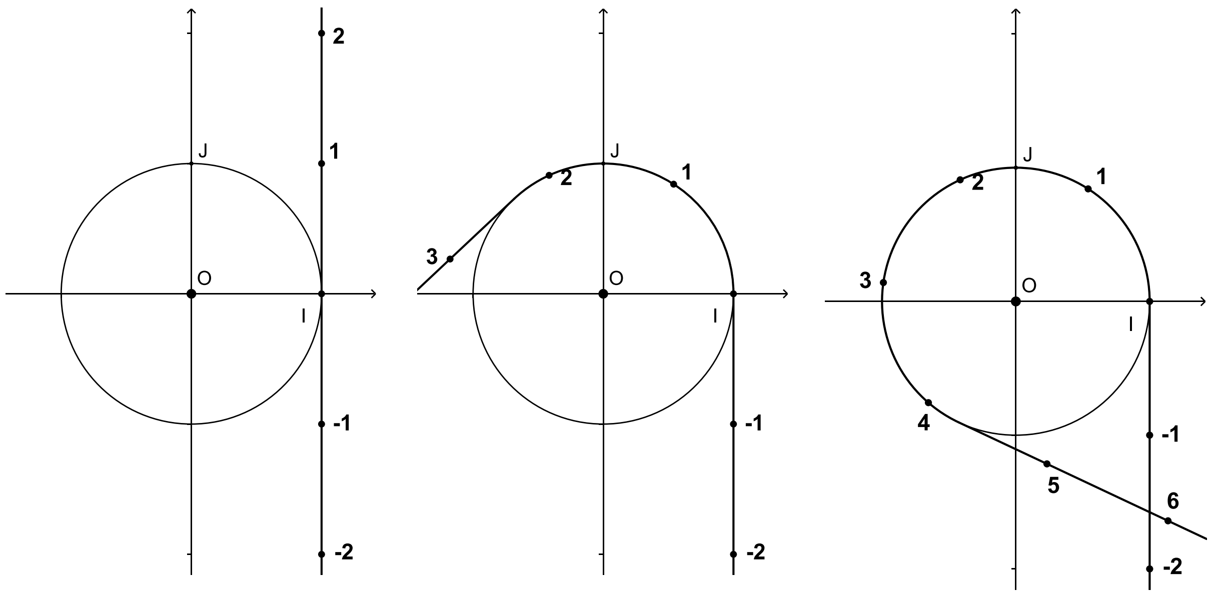
❖ Le cercle trigonométrique



Définition. *Le plan est muni d'un repère orthonormé* $(O; I, J)$.
Le <u>*cercle trigonométrique*</u> *est le cercle de centre* O, *de rayon* 1, *orienté dans le sens indiqué par la flèche (appelé* <u>*sens direct*</u>*), c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.*

On trace la tangente en I au cercle trigonométrique C et on munit cette droite du repère (I, A) avec $IA = OI = 1$: elle représente la droite des réels.
On enroule cette droite des réels autour du cercle C : la demi-droite $[IA)$ s'enroule dans le sens direct et la demi-droite $[IA')$ s'enroule dans le sens indirect.

Propriété. *Tout point* N *d'abscisse* x *de la droite des réels vient se superposer à un point* $M(x)$ *du cercle* C, *et on associe ainsi à tout réel* x *un unique point* $M(x)$ *du cercle trigonométrique appelé* <u>*image de x*</u> *sur* C.
Réciproquement, tout point M' *du cercle* C *est l'image d'un réel* x' *; il est alors aussi l'image des réels* $x' + 2\pi$, $x' + 4\pi$, *...,* $x' - 2\pi$, $x' - 4\pi$, *...*



Le début de l'enroulement de la demi-droite $[IA)$

Définition. *On dit que deux réels* x *et* x' *sont* <u>*congrus*</u> *modulo* 2π *s'il existe un entier* k *tel que* $x = x' + 2k\pi$. *Autrement dit* x *et* x' *différent d'un multiple de* 2π
On note $x \equiv x' \ [2\pi]$.

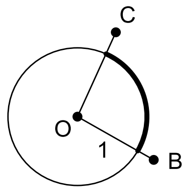
Définition. *Lorsque le nombre x vient se superposer au point M du cercle trigonométrique, on dit que x est une* abscisse curviligne *de* M.

Exemple

Le réel $\frac{\pi}{2}$ est une abscisse curviligne de J. En effet puisque le cercle trigonométrique a pour rayon 1, son périmètre vaut 2π et la longueur de l'arc IJ (un quart de cercle) vaut $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Les autres abscisses curvilignes de J sont $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$, …, $\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2}$, …

Remarque. Lorsque l'abscisse curviligne x du point N appartient à l'intervalle $[0; 2\pi]$, elle est égale à la longueur de l'arc de cercle d'origine I et d'extrémité le point $M(x)$.

Définition. *Le* radian *est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc que cet angle intercepte sur un cercle de rayon 1.*



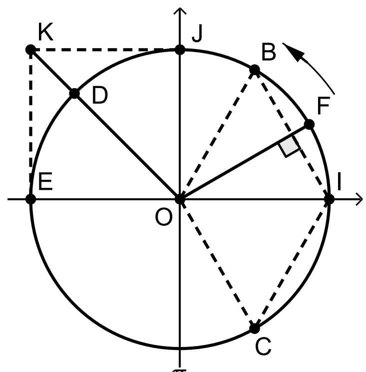
On a ainsi une nouvelle unité de mesure d'angle dans laquelle $180° = \pi$ rad puisque la longueur du demi-cercle trigonométrique est π.

Par proportionnalité, voici les valeurs à connaître.

Degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad

Exemple

On considère le cercle trigonométrique. Les triangles OIB et OIC sont des triangles équilatéraux et $OJKE$ est un carré. La diagonale de ce carré coupe le cercle en D, la hauteur issue de O dans le rectangle OIB coupe le cercle en F.
Trouver une abscisse curviligne des points B, D, F et C.

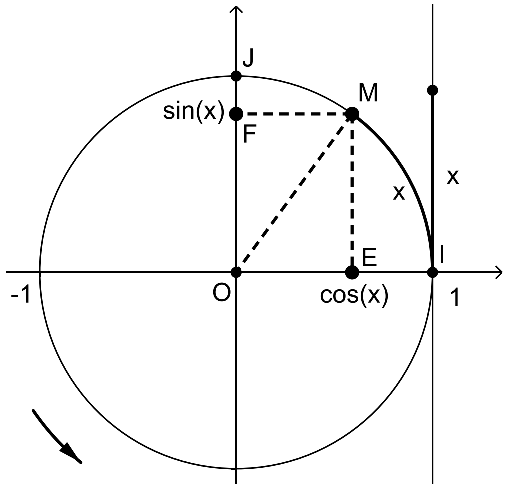


Réponse.

- Le triangle OIB est équilatéral, l'angle $\widehat{IOB}$ a une mesure de 60°. Or $60° = \frac{1}{3} \times 180°$, donc l'arc IB a pour longueur $\frac{1}{3} \times \pi = \frac{\pi}{3}$ ($\widehat{IOB} = \frac{\pi}{3}$ rad). Donc B a pour abscisse curviligne $\frac{\pi}{3}$.
- On a $\widehat{IOD} = \widehat{IOJ} + \widehat{JOD} = 90° + 45° = 135°$. Or $135° = \frac{3}{4} \times 180°$, donc la longueur de l'arc ID est $\frac{3\pi}{4}$. Le point D a donc pour abscisse curviligne $\frac{3\pi}{4}$.
- L'angle $\widehat{IOF}$ mesure 30°, donc l'arc IF a pour longueur la moitié de l'arc IB. Une abscisse curviligne de F est donc $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.
- La longueur de l'arc IC est également $\frac{\pi}{3}$ mais puisqu'on tourne dans le sens indirect, une abscisse curviligne de C est $-\frac{\pi}{3}$, mais aussi $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$.

2. Cosinus et sinus d'un réel

Définition. *On considère un réel x et M le point d'abscisse curviligne x sur le cercle. On appelle* <u>*cosinus*</u> *de x l'abscisse de M et* <u>*sinus*</u> *de x l'ordonnée de M.*

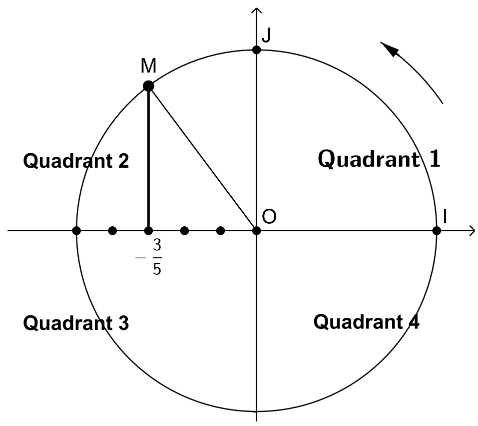


Théorème.
1. Pour tout réel x, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
2. Pour tout réel x, on a $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

<u>**Exemple**</u>

Considérons un réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\cos x = -\frac{3}{5}$ et soit M ayant x pour abscisse curviligne.

Plaçons le point M : puisque $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, ce point appartient au deuxième quadrant. On place le point de coordonnées $\left(-\frac{3}{5}; 0\right)$ puis on construit la perpendiculaire à (OI) passant par ce point. L'intersection de cette droite avec deuxième quadrant est M.



Calculons le sinus de x. D'après le théorème, on a

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1,$$

donc $(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$ puis

$$(\sin x)^2 = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2,$$

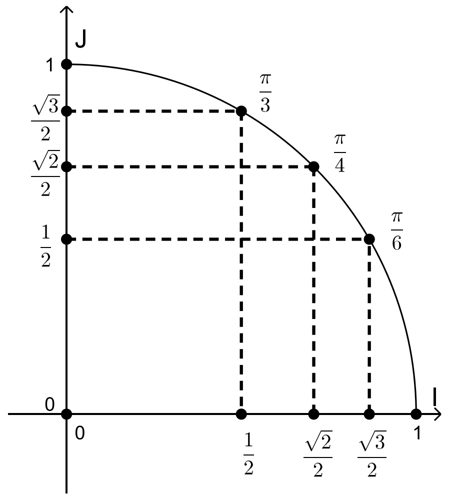
d'où l'on déduit que

$$\sin x = \frac{4}{5} \text{ ou } \sin x = -\frac{4}{5}.$$

Or comme M est situé dans le deuxième quadrant, on a $\sin x > 0$, donc $\sin x = \frac{4}{5}$.

❖ Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

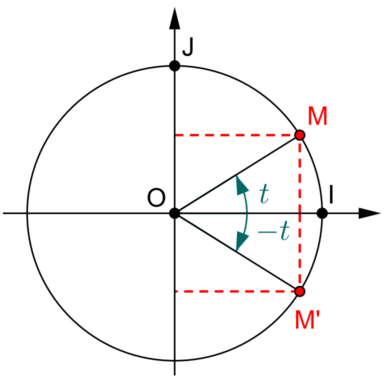
À l'aide du théorème de Pythagore (dans un triangle rectangle isocèle pour $\frac{\pi}{4}$ et dans un triangle équilatéral pour $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$), on démontre les égalités résumées dans le tableau suivant.



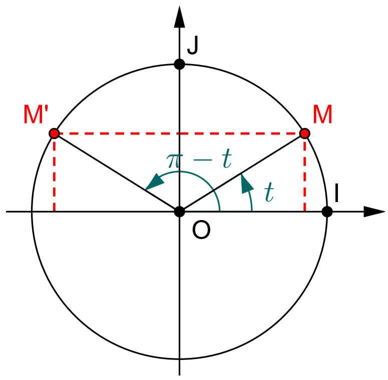
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

❖ Angles associés

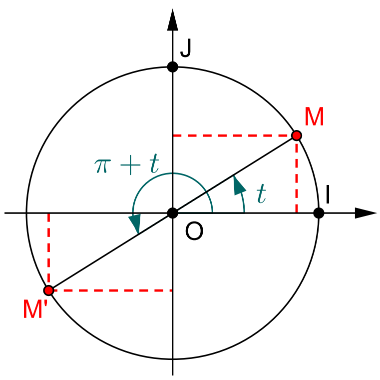
Pour tout réel t, on a les égalités suivantes.



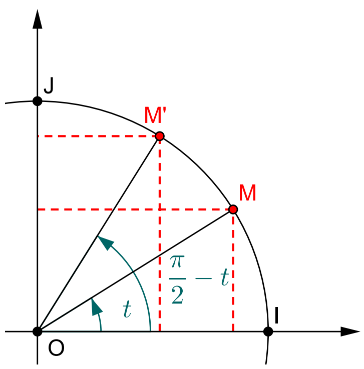
$\cos(-t) = \cos(t)$
$\sin(-t) = -\sin(t)$



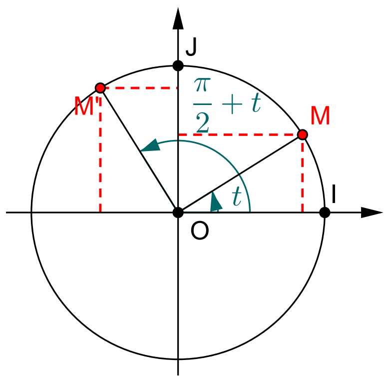
$\cos(\pi - t) = -\cos(t)$
$\sin(\pi - t) = \sin(t)$



$\cos(\pi + t) = -\cos(t)$
$\sin(\pi + t) = -\sin(t)$



$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$



$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin(t)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos(t)$

- ❖ **Équations trigonométriques**

Théorème. Soit u et v deux réels.
- L'égalité $\cos u = \cos v$ équivaut à $u \equiv v\ [2\pi]$ ou $u \equiv -v\ [2\pi]$;
- L'égalité $\sin u = \sin v$ équivaut à $u \equiv v\ [2\pi]$ ou $u = \pi - v\ [2\pi]$.

Exemple

Déterminons les réels qui ont $\frac{1}{2}$ comme sinus. Cela revient à résoudre l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ ou encore $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$. D'après le théorème, on a $x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ donc les nombres ayant $\frac{1}{2}$ pour sinus sont ceux de la forme $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, avec k un entier.

Exemple

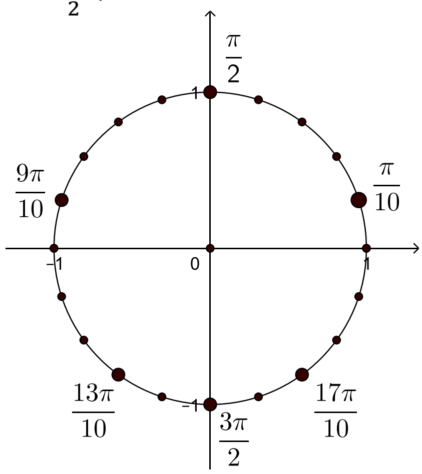
Résoudre l'équation $\cos 3x = \sin 2x$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0; 2\pi[$. Placer ces solutions sur le cercle trigonométrique donné où l'on a divisé le cercle en 20 arcs de même longueur.

Réponse. On commence par se ramener à une équation ne faisant intervenir que du cosinus ou du sinus : $\cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$. On applique alors le théorème.

$$\begin{aligned}
\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \quad &\Leftrightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \text{ ou } 3x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{10} + k \times \frac{2\pi}{5} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Pour obtenir les solutions sur $[0; 2\pi[$, on remplace k par $0, 1, 2, 3, 4$ dans le premier groupe de solution et par 1 dans le second groupe. Ainsi :

$$S_{[0;2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{10}; \frac{13\pi}{10}; \frac{3\pi}{2}; \frac{17\pi}{10}\right\}.$$



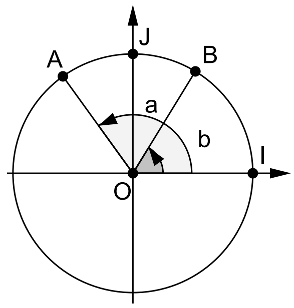
3. Formules d'addition et de duplication

Théorème (formule d'addition). Pour tous réels a et b on a
1. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
2. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
4. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Démonstration.

1. Soit A et B les points du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne a et b. Alors $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) = a - b$, et comme $OA = OB = 1$, il vient

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) = \cos(a-b).$$



D'autre part dans le repère orthonormé $(O;I,J)$, les coordonnées de A sont $(\cos a\,;\sin a)$ et celles de B sont $(\cos b\,;\sin b)$, d'où

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos a\cos b + \sin a \sin b,$$

ce qui démontre bien l'égalité.

2. Écrivons d'après la formule précédente

$$\cos(a+b) = \cos\big(a-(-b)\big) = \cos a\cos(-b) - \sin a\sin(-b).$$

Comme $\cos(-b) = \cos b$ et $\sin(-b) = \sin b$, on a la formule annoncée.

3. En se souvenant des formules $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et en utilisant **2.**, il vient

$$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b = \sin a\cos b - \sin b\cos a.$$

4. En remplaçant b par $-b$ on obtient l'égalité 4. ■

Exemple A

Calculons $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Théorème (formule de duplication). Pour tout réel a on a

1. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

2. $\sin 2a = 2\cos a \sin a$

Démonstration.

1. D'après la formule d'addition du cosinus,

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

De plus comme $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on a $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ d'où

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a.$$

De même $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ et donc

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1.$$

2. En utilisant la formule d'addition sur les sinus,

$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a\cos a + \sin a \cos a = 2\sin a\cos a\,.\ ■$$

4. Étude des fonctions sinus et cosinus

❖ Définitions et premières propriétés

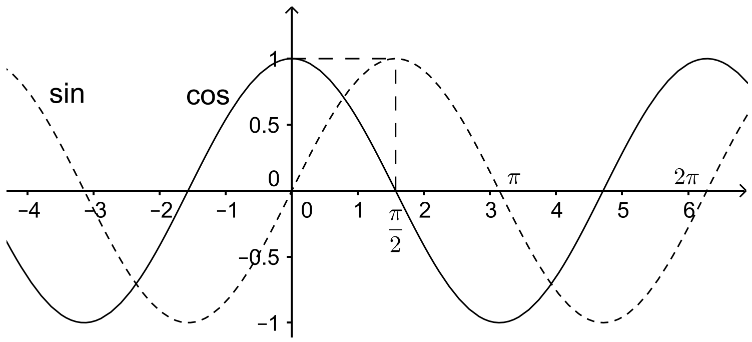
Définition. *On appelle fonction sinus la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto \sin x$. *On appelle fonction cosinus la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto \cos x$.

Théorème (périodicité). Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+2\pi) = \sin x$ et $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

Les courbes de sinus et cosinus dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$

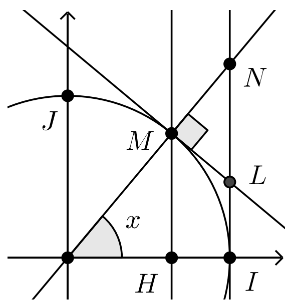
Théorème (parité). La fonction sinus est impaire, la fonction cosinus est paire c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.

La courbe de sinus est donc symétrique par rapport à l'origine du repère et celle cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Courbe représentative des fonctions sinus et cosinus

Théorème. On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$.



Démonstration. La première limite nécessite une définition rigoureuse du sinus que l'on a pas au lycée. Ici on se base sur le graphique ci-contre, où on a pris un angle x vérifiant $0 < x < \frac{\pi}{2}$. On rappelle que x est la longueur de l'arc MH. On a

- $MH \leq MI$ car MI est l'hypoténuse dans le triangle MHI, et comme $MI \leq x$ on a $MH \leq x$;
- $x \leq ML + LI \leq NL + LI = NI$.

Donc $MH \leq x \leq NI$. Mais $MH = \sin x$ et $NI = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, d'où $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$ puis $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$, ce qui donne finalement $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.
Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, alors $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, d'où $\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq 1$ d'après ce qui précède, et comme le sinus est impair et le cosinus pair, on a également $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.
Or $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ (intuitivement, cosinus est continue en 0), donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Pour la seconde limite, on utilise une formule de trigonométrie. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$ d'où $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ puis $\frac{1-\cos x}{x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$. Mais $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$, donc par composition $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 0$, d'où par les règles usuelles le résultat. ∎

❖ **Études des fonctions sinus et cosinus**

Théorème. Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\sin'(x) = \cos x \text{ et } \cos'(x) = -\sin x.$$
En particulier elles sont continues sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$, prouvons que sinus est dérivable en a. On a
$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \frac{\sin a\cos h+\cos a\sin h-\sin a}{h} = \sin a \times \frac{\cos h-1}{h} + \cos a \times \frac{\sin h}{h}.$$
D'après le théorème précédent, il vient $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \cos a$, ce qui prouve que sinus est dérivable en a de dérivée $\cos a$.
On procède de la même façon pour cosinus. ■

Corollaire. Soit a et b deux réels. Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \sin(ax+b) \text{ et } g(x) = \cos(ax+b)$$
sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = a\cos(ax+b)$ et $g'(x) = -a\sin(ax+b)$.

Exemple

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 1$.

1. Étudier la parité de f.
2. Démontrer que f est périodique de période π.
3. Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Déduire des questions précédentes la représentation graphique de f.

Réponse.

1. Pour tout x, on a $f(-x) = \cos(-2x) - 1 = \cos(2x) - 1 = f(x)$ car la fonction cos est paire. Donc f est paire.
2. Par 2π-périodicité de f, on a pour tout x,
$$f(x+\pi) = \cos\big(2(x+\pi)\big) - 1 = \cos(2x+2\pi) - 1 = \cos(2x) - 1$$
donc f est π-périodique.
3. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto -2\sin(2x)$, donc $f'(x) = -2\sin(2x)$. Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $2x \in [0; \pi]$, donc $\sin(2x) \geq 0$, donc $f'(x) \leq 0$, ainsi f est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. On construit la courbe de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ à l'aide de quelques valeurs de la fonction. Par parité, on en déduit la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, c'est-à-dire sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Comme cet intervalle a pour longueur π et que f est π-périodique, on en déduit la courbe tout entière en appliquant des translations de vecteurs $k\pi\vec{\imath}$ où k est un entier.