Trigonométrie – Exercices

1 Résoudre les inéquations suivantes sur les intervalles indiqués.

1. $\cos x > \frac{1}{2}$ sur $[0;\pi]$, sur $[-\pi;\pi]$, sur $[0;2\pi]$.

2. $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0;\pi]$, sur $[0;2\pi]$.

3. $2\cos x - \sqrt{2} < 0$ sur $[0;2\pi]$, sur $[\pi;3\pi]$.

2 Montrer les relations suivantes

a. $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$.

b. $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \cos^2 y$.

3 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Pour tout réel x, $\sin 2x \neq 2\sin x$.

b. Pour tout réel x, on a $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

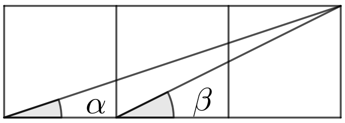
c. $\sin\left(\frac{\pi}{20}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}\right)$.

4 On sait que $\cos t = \frac{1}{3}$ et que $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Calculer $\cos 2t$.

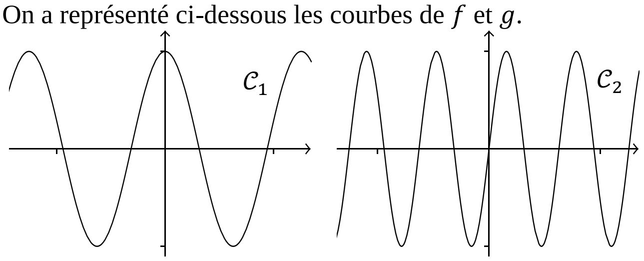
2. Déterminer $\sin t$ et $\sin 2t$.

5 Trois carrés sont juxtaposés comme sur la figure ci-contre.
Montrer que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.



Sinus et cosinus

6 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \sin 2x \text{ et } g(x) = 2\cos x.$$
On a représenté ci-dessous les courbes de f et g.



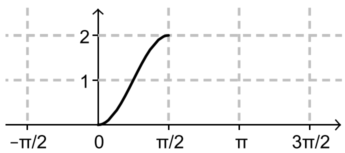
1. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Qu'en déduit-on pour la courbe de f ?

2. Exprimer $g(-x)$ en fonction de $g(x)$. Qu'en déduit-on pour la courbe de g ?

3. Attribuer à chaque fonction sa courbe.

4. Étudier la périodicité de f et g.

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = 1 - \cos(2x)$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée ci-contre sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.



1. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$, puis compléter $\mathcal{C}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

2. Exprimer $f(x+\pi)$ en fonction de $f(x)$, puis compléter $\mathcal{C}$ sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

8 Déterminer le signe des expressions suivantes sur l'intervalle $[0;\pi]$.

a. $f_1(x) = 2 + \sin x$ **b.** $f_2(x) = 1 + \cos x$

c. $f_3(x) = \sin x - 2$ **d.** $f_4(x) = 1 - \sin^2 x$

9 À l'aide d'un cercle trigonométrique, résoudre l'inéquation $\cos x > \frac{1}{2}$ sur $[-\pi;\pi]$ et en déduire le signe de $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}$ sur $[-\pi;\pi]$. Même question sur $[0;2\pi]$.

10 Construire sur l'intervalle $[0;2\pi]$ le tableau de signe de $f(x) = \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $g(x) = \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$.

2. a. Exprimer $f(-x)$ et $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$.

b. Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$.

3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0;\pi]$.

4. Construire le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$, construire la courbe de f sur $[0;\pi]$ puis sur $[-\pi;3\pi]$.

12 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 2\cos x - \cos 2x.$$

1. a. Calculer $f(-x)$ et $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$.

b. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$.

2. a. Montrer que $f'(x) = 2\sin x\,(2\cos x - 1)$.

b. Résoudre sur $[0;\pi]$ l'inéquation $2\cos x - 1 \geq 0$.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ puis construire le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$.

3. Construire la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$ dans un repère adapté

4. On considère l'équation $\cos 2x = 2\cos x$.
Montrer grâce à l'étude de la fonction f que cette équation admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;\pi]$ et donner un encadrement à 10^{-2} près de α. Combien l'équation admet-elle de solution sur l'intervalle $[-1515\pi\,;1515\pi]$?

13 Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leur ensemble de définition et de dérivabilité.

a. $f_1(x) = x - 2\cos x$ **b.** $f_2(x) = \sin x - \cos x$

c. $f_3(x) = \frac{1}{\sin x}$ **d.** $f_4(x) = \cos(3x)$

e. $f_5(x) = \cos^2(x)$ **f.** $f_6(x) = \frac{1}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)}$

Fonctions trigonométriques et intégration

14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2 x$.

1. Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.

2. Déterminer les primitives de f.

3. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

15 Calculer les intégrales suivantes.

a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ **b.** $I = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x$

16 Vrai ou faux ? Justifier.

Soit $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\sin^2 t\ \mathrm{d}t$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos^2 t\ \mathrm{d}t$.

a. $A > B$ **b.** $A + B = \frac{\pi^2}{32}$ **c.** $\frac{\pi^2}{64} \leq B \leq \frac{\pi^2}{32}$

17 On pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \ \mathrm{d}x$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \ \mathrm{d}x$.

a. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $I=1+J$ et $J=e^{\frac{\pi}{2}}-I$.

b. En déduire les valeurs de I et J.

18 Pour $n \geq 0$ on pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \sin x \ \mathrm{d}x$.

Montrer que $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$, en déduire la limite de (I_n).

19 On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \ \mathrm{d}x$.

1. Étudier les variations de (I_n).

2. Montrer que (I_n) est convergente.

20 *(1998, sports de haut niveau).* On considère les intégrales $I=\int_0^{\pi} \cos^4 x \ \mathrm{d}x$ et $J=\int_0^{\pi} \sin^4 x \ \mathrm{d}x$.

1. a. Montrer que I peut s'écrire

$$I=\int_0^{\pi} \cos x\left(\cos x-\cos x \sin^2 x\right) \mathrm{d}x.$$

b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I=\int_0^{\pi} \sin^2 x \ \mathrm{d}x-\frac{1}{3} J.$$

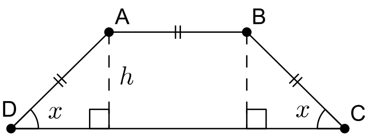
c. Montrer de même que $J=\int_0^{\pi} \cos^2 x \ \mathrm{d}x-\frac{1}{3} I$.

2. a. Montrer que $I+J=\frac{3\pi}{4}$ et que $J-I=0$.

b. En déduire les intégrales I et J.

Problèmes

21 On considère le trapèze isocèle $ABCD$ ci-contre où $AD=AB=BC=1$. On souhaite déterminer l'angle x pour que l'aire du trapèze soit maximale.



1. Exprimer la hauteur h en fonction de l'angle x.

2. Démontrer que l'aire f du trapèze est définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=(\cos x+1)\sin x$.

3. a. Démontrer que $f'(x)=2\cos^2 x+\cos x-1$.

b. Factoriser $2X^2+X-1$.

c. En déduire le signe de f' et conclure.

22 On définit la fonction tangente par $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$. On la note $f(x)$ dans la suite.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Exprimer $f(x+\pi)$ et $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

3. Déterminer la limite de f en $\frac{\pi}{2}$. Qu'en déduit-on pour la courbe C ?

4. a. Calculer $f'(x)$. Montrer que $f'(x)=1+\left(f(x)\right)^2$.

b. Donner les variations de f sur I puis sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

5. a. Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de C et T sur I.

c. Tracer C et T sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

23 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x-\sin x.$$

1. f est-elle paire ? impaire ? périodique ?

2. Montrer que f est croissante sur $[0;+\infty[$.

3. En déduire le signe de f.

4. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$g(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}.$$

Montrer que $g'(x)=f(x)$ puis que $g(x) \geq 0$.

5. a. En déduire que pour tout x positif

$$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1.$$

b. L'inégalité est-elle encore vraie si x est négatif ?

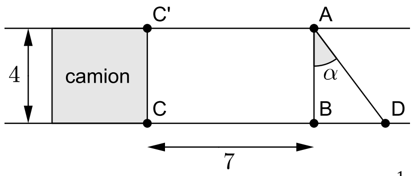
6. En étudiant la fonction $h(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$ montrer que pour tout x positif, $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

7. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

24 Montrer que pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x.$$

25 **(Pauvre bête)** Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km.h^{-1}.



Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite à 30 km.h^{-1}.

L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$.

Le lapin part du point A en direction de D. On désigne par α une mesure en radian de l'angle $\widehat{BAD}$ avec $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

On se demande s'il est possible que le lapin traverse sans se faire écraser.

1. Montrer que $BD=\frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}$ puis déterminer les distances CD et AD en fonction de α.

2. Montrer que le temps t_1 mis par le camion pour parcourir la distance CD est $\frac{7}{60\,000}+\frac{4\sin\alpha}{60\,000\cos\alpha}$ (en heures), puis déterminer le temps t_2 (en heures) mis par le lapin pour parcourir la distance AD.

3. Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par

$$f(\alpha)=\frac{7}{2}+2\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{4}{\cos\alpha}.$$

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\alpha)>0$.

4. Exprimer $f'(\alpha)$ en fonction de α et démontrer que $f'(\alpha)$ est du signe de $1-2\sin\alpha$.

5. Dresser le tableau de variation de f et conclure.

6. On souhaite résoudre l'équation $f(\alpha)=0$.

a. Montrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(\alpha)=0$ admet deux solutions.

b. Montrer que $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow 7\cos\alpha=8-4\sin\alpha \Leftrightarrow 65\sin^2\alpha-64\sin\alpha+15=0$.

c. En déduire que le lapin ne sera pas écrasé si et seulement si $\alpha \in [22{,}62°;36{,}87°]$ (à 10^{-2} près).