Inégalités de concentration

Tout ce chapitre, on considère des variables aléatoires discrètes à valeurs réelles définies sur un univers Ω muni d'une probabilité P.

1. Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Théorème (inégalité de Markov). Soit X une variable aléatoire à valeurs positives. Pour tout réel a strictement positif, on a

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

La probabilité que X prenne des valeurs supérieures à a diminue lorsque a augmente.

Démonstration. Posons $A^+ = \{x \in X(\Omega)\,;x \geq a\}$ et $A^- = \{x \in X(\Omega)\,;x \geq a\}$. Les ensembles A^+ et A^- constituent une partition de $X(\Omega)$, donc

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_{x \in A^+} xP(X = x) + \sum_{x \in A^-} xP(X = x).$$

Soit $x \in A^+$. On a $x \geq a$, d'où $xP(X = x) \geq aP(X = x)$, puis, comme a ne dépend pas de x dans la somme,

$$\sum_{x \in A^+} xP(X = x) \geq \sum_{x \in A^+} aP(X = x) = a \sum_{x \in A^+} P(X = x).$$

On remarque enfin que $P(X \geq a) = P(A^+)$, d'où

$$\sum_{x \in A^+} xP(X = x) \geq aP(X \geq a).$$

La somme $\sum_{x \in A^-} xP(X = x)$ est bien entendu positive, si bien que finalement

$$E(X) \geq aP(X \geq a)$$

d'où l'inégalité de Markov en divisant par $a > 0$. ■

Théorème (inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Soit X une variable aléatoire. Pour tout réel a strictement positif, on a

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

Lorsque a augmente, la probabilité que X prennent des valeurs éloignées de $E(X)$ diminue.

Démonstration. Puisque $|X - E(X)|$ et a sont des réels positifs,

$$|X - E(X)| \geq a \Leftrightarrow \left(X - E(X)\right)^2 \geq a^2,$$

donc en appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $\left(X - E(X)\right)^2$ et a^2, on a

$$P\left(\left(X - E(X)\right)^2 \geq a^2\right) \leq \frac{E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}{a^2},$$

c'est l'inégalité attendue vu la définition de la variance. ■

Exemple

On lance 100 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée, on note X le nombre de « pile » obtenus. La variable aléatoire X suit la la binomiale de la paramètres $n = 100$ et

$p = \frac{1}{2}$. Son espérance est $np = 50$ et sa variance est $np(1-p) = 25$.
Calculons la probabilité de $(40 \leq X \leq 60)$. Puisque X est à valeurs entières, remarquons que

$$(40 \leq X \leq 60) = (39 < X < 61)$$

Le milieu de l'intervalle $[39; 61]$ est 50, donc

$$39 < X < 61 \Leftrightarrow |X - 50| < 11.$$

Or d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|X - 50| \geq 11) \leq \frac{25}{11^2}$$

Donc, en passant à l'événement contraire,

$$P(40 \leq X \leq 60) \geq 1 - \frac{25}{11^2} \geq 0{,}79.$$

Il y a plus de 79 % de chance que X prennent des valeurs entre 41 et 59.
La calculatrice donne

$$P(40 \leq X \leq 60) \approx 0{,}96.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne fournit pas des inégalités numériques intéressantes.

2. Inégalité de concentration et loi faible des grands nombres

Théorème (inégalité de concentration). Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n de la loi d'une variable aléatoire X et M_n la moyenne de cet échantillon.
Alors, pour tout réel $a > 0$,

$$P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{na^2}$$

Démonstration. On sait que $E(M_n) = E(X)$ et que $\mathrm{Var}(M_n) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X)$, par conséquent, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|M_n - E(X)| \geq a) = P(|M_n - E(M_n)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(M_n)}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{na^2}. \blacksquare$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient la loi faible des grands nombres.

Théorème (loi faible des grands nombres). Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n de la loi d'une variable aléatoire X et M_n la moyenne de cet échantillon.
Alors, pour tout réel $a > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0.$$

Autrement dit, l'écart entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable ne dépasse une valeur donnée à l'avance qu'avec une probabilité qui tend vers zéro quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini.