Inégalités de concentration – Exercices

1 Sur une autoroute, la vitesse moyenne des voitures est de 120 km/h.

1. Majorer la probabilité qu'un automobiliste roule à une vitesse supérieure à 150 km/h.

2 Majorer la probabilité d'avoir un écart à la moyenne supérieur ou égal à 2 lorsque $\mathrm{Var}(X) = 1$.

3 On considère la variable aléatoire X dont la loi est la suivante.

x	1	4	10
$P(X = x)$	0,6	0,3	0,1

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Calculer $P(|X - E(X)| \geq 2)$.
3. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $a = 2$ et comparer le résultat à celui de la question **2**.

4 Calculer $P(|X - E(X)| \geq 3)$ avec $\mathrm{Var}(X) = 2{,}5$.

5 Calculer $P(|X - E(X)| < 11)$ avec $\mathrm{Var}(X) = 7$.

6 Soit X une variable aléatoire positive et k un réel positif non nul.

1. Montrer que $P\big(X \geq kE(X)\big) \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que moins de 10 % des salariés gagnent plus de 10 fois le salaire moyenne.

7 On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. On note M_n la moyenne de piles obtenus. Quelle doit-être la valeur minimale de n pour que la probabilité de l'événement $\left|M_n - \frac{1}{2}\right| \geq 0{,}01$ soit inférieure à 5 % ?

8 Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie A – Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.
Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que
- un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1 ;
- si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :
- A l'événement « le candidat répond correctement à la question Q1 » ;
- B l'événement « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

1. Construire un arbre pour représenter la situation.
2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :
- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 ;
- X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2 ;
- X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.

4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2. En déduire l'espérance de X. Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
5. On souhaite déterminer la variance de X.
   a. Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. En déduire $P(X = 1)$
   b. Montrer que la variance de X vaut 0,57.
   c. A-t-on $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$? Est-ce surprenant ?

Partie B – Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.
Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.
Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.
On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la valeur exacte de $P(Y = 8)$.
3. Donner l'espérance et la variance de Y.

Partie C – On suppose que les deux variables aléatoires X et Ysont indépendantes. On note Z la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen, donc $Z = X + Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z.
2. Soit n un nombre entier strictement positif.
   Pour i entier variant de 1 à n, on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.
   On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ suivent la même loi que Z et sont indépendantes.
   On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire $M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}$.
   a. Quelle est l'espérance de M_n ?
   b. Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart-type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?
   c. Pour les valeurs trouvées en **b.**, montrer que la probabilité que $6{,}3 \leq M_n \leq 8{,}3$ est supérieure ou égale à 0,75.

9 *(2024, métropole).* La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.
Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ».

Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7% des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65% des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98% des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

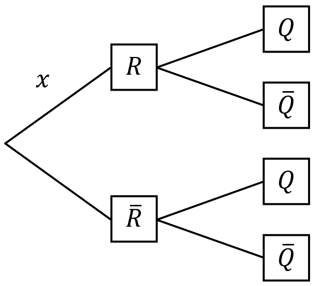
On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.
On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_R(Q)$.

2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.

a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Montrer que $x = 0{,}9$.

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?

4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20\,;0{,}615)$.
La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?

5. On interroge au hasard dix étudiants.
Les variables aléatoires N_1, N_2, ..., N_{10} modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux.
On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20\,;0{,}615)$.
Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
Calculer l'espérance et la variance de S.

6. On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.

a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?

b. Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $\text{Var}(X) = 0{,}47355$.

c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation : « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80% ».

10 *(2024, métropole).* Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60% des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30 % des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.
Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75% pour les clients sur internet ;
- 90% pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80% pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.
On définit les évènements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur interne » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

1. Construire un arbre représentant la situation

2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

3. Démontrer que $P(S) = 0{,}8$.

4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.
Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.
La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution.
La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.
On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :

- L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
- L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.