

# Évolution, taux moyen

## 1. Écriture en pourcentage d'un nombre

**Définition.** Étant donné un nombre décimal  $x$ , on appelle écriture en pourcentage de  $x$  l'expression  $100x$  %.

Exemple :  $1 = 100$  %,  $0,42 = 42$  % et  $50$  % =  $0,5$ .

## 2. Taux d'évolution et coefficient multiplicateur

**Définition.** On considère des nombres : la valeur initiale  $V_0$  et la valeur finale  $V_1$ .

- La variation absolue est la différence  $V_1 - V_0$ .
- Le taux d'évolution de  $V_0$  à  $V_1$  est le nombre  $t = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$ . On l'exprime souvent en pourcentage.
- Le coefficient multiplicateur de l'évolution est  $CM = \frac{V_1}{V_0}$ .
- Si l'évolution est une hausse, on a  $t > 0$  et  $CM > 1$ .
- Si l'évolution est une baisse, on a  $t < 0$  et  $CM < 1$ .

### Exemple

Le prix d'un article est passé de 20 € à 50 €. La variation absolue est 30 €. Le taux d'évolution est  $1,5 = 150$  %. Le coefficient multiplicateur est 2,5. Il s'agit d'une augmentation.

Le prix d'un article est passé de 50 € à 20 €. La variation absolue est  $-30$  €. Le taux d'évolution est  $-0,6 = -60$  %. Le coefficient multiplicateur est 0,4. Il s'agit d'une baisse.

Le coefficient multiplicateur  $CM$  et le taux d'évolution  $t$  sont liés par la relation :

$$CM = 1 + t \text{ ou encore } t = CM - 1.$$

(où  $t$  est exprimé en décimal).

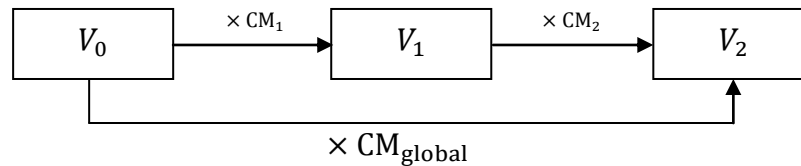
On retiendra donc qu'augmenter de  $t$  %, c'est multiplier par  $1 + \frac{t}{100}$ , et diminuer de  $t$  %, c'est multiplier par  $1 - \frac{t}{100}$ .

### Exemple

Une baisse de 15 % de l'effectif est intervenue dans un lycée qui comptait 1020 élèves. Le pourcentage d'évolution  $t$  est négatif :  $t = -15\% = -0,15$ . Le coefficient multiplicateur correspondant à cette évolution est donc  $1 + t = 0,85$ . Ainsi le nouveau nombre d'élèves est  $V_1 = 0,85 \times V_0 = 867$ .

### 3. Évolutions successives

**Propriété.** Le coefficient multiplicateur de deux évolutions successives est le produit des coefficients multiplicateurs des deux évolutions :  $CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2$



Pour obtenir le taux d'évolution  $t$  de l'évolution globale, on peut effectuer les étapes suivantes.

1. On détermine le coefficient multiplicateur  $CM_1$  de la première évolution puis le coefficient multiplicateur  $CM_2$  de la deuxième évolution.
2. On calcule le coefficient global  $CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2$ .
3. On calcule le taux d'évolution global par la formule  $t = CM_{\text{global}} - 1$ .

#### Exemple

Le prix d'un article a augmenté de 10% puis a diminué de 10%. Le coefficient multiplicateur de la première évolution est  $1 + 0,1 = 1,1$  et celui de la seconde est  $1 - 0,1 = 0,9$ . Ainsi le coefficient multiplicateur de l'évolution globale est  $1,1 \times 0,9 = 0,99$ , d'où l'on déduit que le taux d'évolution est  $0,99 - 1 = -0,01 = -1\%$ . Au final l'article a vu son prix diminuer de 1%.

Attention, le taux d'évolution n'est donc pas égal à la somme des taux, ni à leur produit.

### 4. Évolutions réciproques

**Définition.** Lorsqu'après deux évolutions le coefficient multiplicateur global est égal à 1, les deux évolutions sont dites réciproques, leurs taux sont dits réciproques, leurs coefficients multiplicateurs aussi.

Pour un coefficient multiplicateur  $CM$ , le coefficient multiplicateur  $CM'$  vérifie  $CM' = \frac{1}{CM}$ .  
Donc le taux réciproque de  $t$  est  $t' = \frac{1}{1 + \frac{t}{100}} - 1$ .

#### Exemple

Calculons le taux réciproque  $t'$  d'une évolution de taux 25 %.

Le coefficient multiplicateur réciproque est  $\frac{1}{1 + \frac{25}{100}} = \frac{1}{1,25} = 0,8$ , d'où  $t' = 0,8 - 1 = -0,2 = -20\%$ .

## 5. Indice de base 100

**Définition.** On considère deux valeurs  $V_1$  et  $V_2$  d'une même grandeur. L'indice de la valeur  $V_2$ , de base 100 en  $V_1$ , est le nombre  $I_2 = \frac{V_2}{V_1} \times 100$ .

### Exemple

En 2009, Lenovo a vendu 6,87 millions de PC, puis 9,87 millions en 2010.

Si l'on choisit comme base 100 en 2009, l'indice du nombre PC vendu en 2010 est  $\frac{9,87}{6,87} \times 100 \approx 143,7$ . Cela correspond à une augmentation de 43,7 %.

Par lecture directe, un indice passant de 100 à  $100 + t$  correspond à une évolution de  $t$  %.

## 6. Taux d'évolution moyen

### Exemple

En deux ans, le nombre de meubles vendus par un magasin est passé de 275 à 396.

1. Calculer le coefficient multiplicateur global.
2. Supposons que le coefficient multiplicateur  $CM$  chaque année ait été le même. Montrer que  $CM$  vérifie l'égalité  $CM^2 = 1,44$ .
3. En déduire le taux d'évolution annuel moyen.

### Réponse.

1.  $CM_{\text{global}} = \frac{396}{275} = 1,44$ .
2. Le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs. Ainsi  $CM_{\text{global}} = CM \times CM = CM^2$  et comme  $CM_{\text{global}} = 1,44$ , on a bien montré que  $CM^2 = 1,44$ .
3. On a déduit  $CM = \sqrt{1,44} = 1,2$  et donc  $t = CM - 1 = 0,2 = 20$  %.

On suppose que chaque année (ou chaque mois, jour...), une grandeur est multipliée par le même coefficient  $CM$ , inconnu.

Au bout de  $n$  années, le coefficient global vérifie

$$CM_{\text{global}} = CM \times CM \times \dots \times CM = CM^n.$$

Pour trouver la valeur de  $CM$  si l'on connaît  $CM_{\text{global}}$ , il faut utiliser calculer la racine  $n$ -ième de  $CM$ .

**Définition.** Soit  $a$  un nombre positif et  $n$  un entier naturel non nul.

L'équation  $x^n = a$  admet une unique solution positive, notée  $x = a^{\frac{1}{n}}$ , appelée racine  $n$ -ième de  $a$ .

$$\begin{array}{l} \sqrt{(1.44)} \\ 1.44^{(1/2)} \\ 2^{(1/5)} \\ 1.148698355 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1.2 \\ 1.2 \end{array}$$

### Exemple

Un article a augmenté de 3 %, diminué de 5 % puis augmenté de 4 %.

Le coefficient multiplicateur global est  $1,03 \times 0,95 \times 1,04 = 1,01764$ , donc le coefficient multiplicateur moyen est  $1,01764^{\frac{1}{3}} \approx 1,00585$ , et le taux moyen environ 0,585 %.