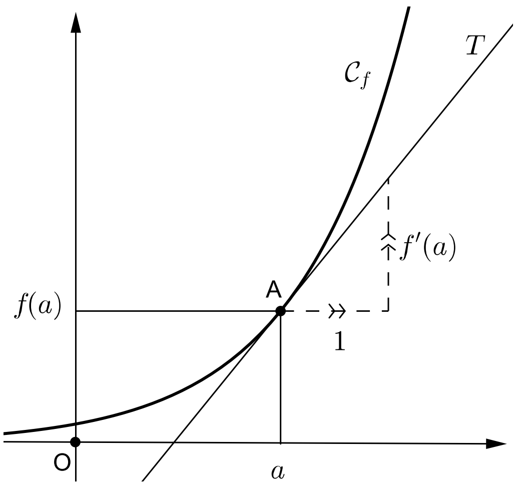
Étude de fonctions

1. Rappel sur la dérivée



Considérons une fonction f définie sur un intervalle I et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère. Étant donné un réel $a \in I$, considérons le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a, c'est-à-dire le point de coordonnées $(a; f(a))$.
En ce point la courbe représentative de f admet une tangente. Le coefficient directeur de cette droite, qui dépend de a, s'appelle nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Si l'on a $f'(a) \geq 0$, cela signifie qu'autour du point A la courbe « monte » puisque la tangente « monte » aussi. Donc pour savoir si une fonction est croissante ou décroissante, il suffit de connaître les intervalles où $f'(a)$ est positif ou négatif. On résume cela ainsi :

- Si f est croissante, alors f' est positive et réciproquement, si f' est positive, alors f est croissante ;
- si f est décroissante, alors f' est négative et réciproquement, si f' est négative, alors f est décroissante.

2. Dérivée de x^n et d'un polynôme

Voici quelques dérivées qu'il faut connaître.

Fonction f	**Fonction dérivée f'**
$f(x) = k$, où k est un nombre	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ où n est un entier	$f'(x) = nx^{n-1}$

Mais cela ne permet pas de dériver une fonction aussi simple que $x^2 - 3x + 2$. Voici les règles qu'il faut appliquer pour y arriver :

- si u et v sont deux fonctions, alors la dérivée de $u + v$ est $u' + v'$;
- si u est une fonction et k un nombre, alors la dérivée de $k \times u$ est $k \times u'$.

Exemple

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $g(x) = 4 + x^{10} - 3x^2$.
On a $f'(x) = 2x - 3 \times 1 + 0 = 2x - 3$ et $g'(x) = 0 + 10x^9 - 3 \times 2x = 10x^9 - 6x$.

On peut à présent étudier les fonctions « polynômes ».

Exemple

Construisons le tableau de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;3]$ par $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$.
On a $f'(x) = -2 \times 2x - 5 = -4x + 5$.
La fonction f' est affine, on cherche pour quelle valeur de x elle s'annule.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 5 = 0 \Leftrightarrow -4x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{-4} \Leftrightarrow x = 1{,}25.$$

Comme $a = -4 < 0$, le signe sera $+0-$, d'où le tableau de signe de f' :

x	0		1,25		3
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit alors les variations de la fonction f.

x	0		1,25		3
variations de f	3	$\nearrow$	6,125	$\searrow$	0

Exemple

Construisons le tableau de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;34]$ par $f(x) = x^3 - 51x^2 + 720x$.
On a $f'(x) = 3x^2 - 102x + 720$.
La fonction f' est un trinôme du second degré dont le discriminant vaut

$$\Delta = (-102)^2 - 4 \times 3 \times 720 = 1764$$

donc f' a deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{-(-102)-\sqrt{1764}}{2\times 3} = 10 \text{ et } x_2 = \frac{-(-102)+\sqrt{1764}}{2\times 3} = 24.$$

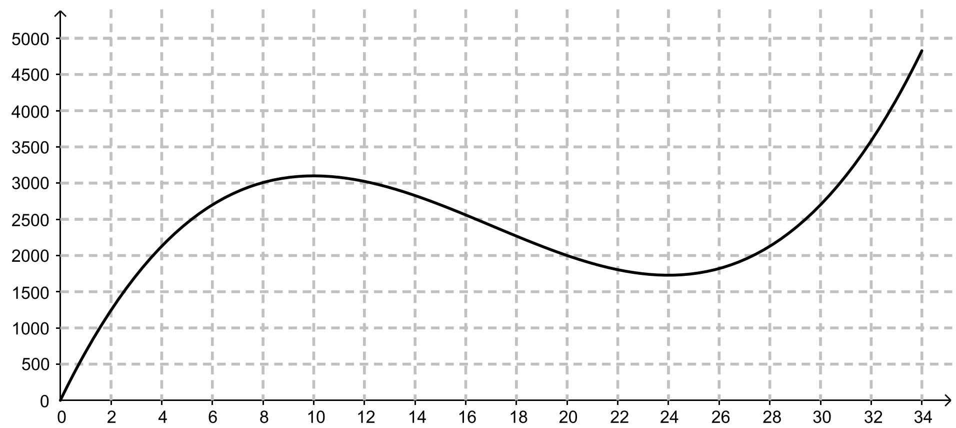
Comme $a = 3 > 0$, le signe de f' est positif, sauf entre les racines, d'où le tableau :

x	0		10		24		34
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit alors les variations de la fonction f.

x	0		10		24		34
variations de f	0	$\nearrow$	3100	$\searrow$	1728	$\nearrow$	4828

La courbe représentative de f est la suivante.



3. Dérivée de $\frac{1}{x}$ et d'une fonction rationnelle

Allongeons la liste des dérivées à connaître :

Fonction f	**Fonction dérivée f'**
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

et rajoutons une règle supplémentaire pour les fonctions quotients :

- si u et v sont deux fonctions, alors la dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Exemple

Construisons le tableau de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $[-4;5]$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$.

Si l'on pose $u(x) = x - 1$ et $v(x) = x^2 + 3$, on peut écrire $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Comme $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$, on a donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2} = \frac{1\times(x^2+3)-(x-1)\times 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-2x^2+2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}.$$

Le dénominateur de cette fonction est un carré, donc il est positif.

Le numérateur est le trinôme du second degré $-x^2+2x+3$. Son discriminant est $\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times 3 = 16$ et ses racines sont donc

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-1)} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times(-1)} = -1.$$

Par conséquent le signe de $f'(x)$ est le suivant.

x	-4		-1		3		5
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit alors les variations de la fonction f.

x	-4		-1		3		5
variations de f	$\frac{-5}{19}$	↘	$-0{,}5$	↗	$\frac{1}{6}$	↘	$\frac{1}{7}$

La courbe représentative de f est la suivante.